擬対称写像とタイヒミュラーモジュラー群

松崎　克彦

お茶の水女子大学理学部数学科

§1. 緒言

この講演要旨では，リーマン面の写像類群とそのタイヒミュラー空間への作用に関連するいくつかの話題について解説する．閉曲面には限定せず，擬等角写像や擬対称写像という複素解析的な概念が有効にあらわれる設定が中心になる．全体のまとまりをよくするために，写像類群の実現問題を巡って議論を進める．まず次の第２節においてこの問題を定式化し，以下で必要になる用語や概念を述べながら，この方面での最近の進展を要約する．最後の定理 2.7 が後の３節，４節との関連では重要である．

写像類群がタイヒミュラー空間に作用したものをタイヒミュラーモジュラー群という．コンパクトとは限らない一般のリーマン面を考えると，その作用の仕方は多種多様になっている．第３節では，その場合のモジュラー変換の分類についての基礎的なことを述べる．モジュライ空間はタイヒミュラー空間のモジュラー群による商空間である．第４節では，この商がよい性質をもつという観点から安定性を考え，安定点のモジュライ空間を導入する．最後の第５節では，タイヒミュラー空間があるファイバー空間の構造をもち，写像類群がその底空間の変換群として作用することをみる．この変換群を幾何学的に実現する問題と，タイヒミュラーモジュラー群の作用の複雑さをファイバーに分解して考察する問題との双方について今後の課題を述べる．

§2. 写像類群の実現問題

まず，古典的な設定として，向き付けられた閉曲面の位相同型群についての問題を述べる．種数 g の閉曲面を Σ_g とし，その向きを保つ自己同型写像 $\omega : \Sigma_g \to \Sigma_g$ 全体のなす群を $\mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ であらわす．また，ω のホモトピー類 $[\omega]$（イソトピー類としても同値で，これを写像類とよぶ）全体のなす群を写像類群といい，$\mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ であらわす．このとき，写像類に落とす対応は全射準同型 $q : \mathrm{Homeo}(\Sigma_g) \to \mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ を定める．一般に写像類群の実現問題とは，与えられた $\mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ の部分群 Γ に対して,（単射）準同型 $\mathcal{E}|_\Gamma : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ で，$q \circ \mathcal{E}|_\Gamma = id|_\Gamma$ となるものが存在するかどうかを問うものと定式化する．

以下では，実現問題に次のような制約あるいは拡張を与えたものについて，現在までに知られている結果を要約する．

(1) コンパクトとは限らない一般のリーマン面 R で考える．さらに単位円板 $\mathbb{D}^2$ においてこの問題を扱い，$R = \mathbb{D}^2/H$ に対しては，フックス群 H に関する同変性を

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

付加した問題とする．

(2) 部分群 $\Gamma \subset \mathrm{MCG}(R)$ に条件を与える．

(3) 準同型 q を位相同型群 $\mathrm{Homeo}(R)$ の部分群に制限する．微分同型群 $\mathrm{Diff}(R)$ や擬等角同型群 $\mathrm{QC}(R)$ で考える．

写像類群は曲面の位相同型によって定義されるが，それは同時にある空間に作用する変換群としての側面ももつ．代表的なものはタイヒミュラー空間である．閉曲面 Σ_g に入る複素構造 σ と向きを保つ自己同型写像 $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ の組 (σ, f) に対して，次の同値関係を定義する：$(\sigma_1, f_1) \sim (\sigma_2, f_2)$ とは，$\sigma_1 = \sigma_2$ であり，かつ $f_2 \circ f_1^{-1}$ がこの複素構造に関する双正則写像にホモトピックであること．この同値関係による同値類をタイヒミュラー類とよび，$[\sigma, f]$ または簡単に $[f]$ であらわす．その全体を種数 g の閉曲面のタイヒミュラー空間とよび，T_g であらわす．タイヒミュラー空間 T_g には，以下で述べる擬等角写像の歪曲係数を経由して複素構造と距離構造が入る．タイヒミュラー空間については [i1] を参照せよ．

写像類群 $\mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ の各元 $[\omega]$ はタイヒミュラー空間 T_g に $[f] \mapsto [\omega]_*([f]) := [f \circ \omega^{-1}]$ のようにして左から作用する．またこの $[\omega]_*$ は T_g の双正則等長変換となるので，表現 $\iota : \mathrm{MCG}(\Sigma_g) \to \mathrm{Aut}(T_g)$ が得られる．種数 $g > 2$ に対して ι は単射である．また Royden の定理により ι は全射である．写像類の作用がタイヒミュラー空間上に固定点をもつことは，その点の定める複素構造に関する双正則写像が，写像類の代表元としてとれることにほかならない．

古典的なニールセン実現問題は，写像類群の有限部分群についての実現問題である．準同型 $\mathcal{E}$ の構成のためには，生成元の間の関係の整合性が問題になるのであるから，有限群がまず対象となる．Nielsen，Fenchel，Zieschang らによる部分的解答のあと，Kerckhoff [k1] により最終的に解決された．

定理 **2.1**．種数 g の閉曲面の写像類群 $\mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ の有限部分群 Γ はタイヒミュラー空間 T_g に共通固定点をもつ．とくに準同型 $\mathcal{E}|_\Gamma : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ で $q \circ \mathcal{E}|_\Gamma = id|_\Gamma$ をみたすものが存在する．

なお上記のことは，微分同型群 $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ に制限した $q_D : \mathrm{Diff}(\Sigma_g) \to \mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ に関する問題としても同様に成り立つ．またこの場合，曲面の微分同型からなる有限群に対しては不変なリーマン計量が構成できるので，対応する写像類からなる群はタイヒミュラー空間に固定点をもつこともわかる．

次に，写像類群の全体 $\Gamma = \mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ の実現についてみる．微分同型への制限 q_D について実現不能であることは既に知られていた（Morita [m4]）が，Markovic [m3] は制限のない q についても拡張できることを最近発表している．

命題 **2.2**．種数 $g > 5$ の閉曲面の写像類群 $\mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ に対して，準同型 $\mathcal{E} : \mathrm{MCG}(\Sigma_g) \to \mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ で $q \circ \mathcal{E} = id$ をみたすものは存在しない．

以下では単位円板 $\mathbb{D}^2$ で考える．その閉包 $\overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{D}^2 \cup S^1$ の向きを保つ位相同型写像全体のなす群を $\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2})$ とし，単位円周 S^1 の向きを保つ位相同型写像全体のなす群を $\mathrm{Homeo}(S^1)$ とする．境界に制限する対応 $q : \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2}) \to \mathrm{Homeo}(S^1)$ は全射準同型である．この q に関する実現問題を考える．

一般に部分群 $\Gamma \subset \mathrm{Homeo}(S^1)$ に対して，$q \circ \mathcal{E}|_\Gamma = id|_\Gamma$ をみたす写像（準同型とは限らない）$\mathcal{E}|_\Gamma$ を q の Γ 上の切断とよぶことにする．切断 $\mathcal{E}|_\Gamma$ がひとつ与えられたとき，

$\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2})$ の元 $g \neq id$ で $g|_{S^1} = id$ となるものによる共役 $g\,\mathcal{E}_\Gamma\, g^{-1}$ もまた q の Γ 上の切断となる．そのような切断は互いに同値であると定義する．単位円板のメビウス変換（等角自己同型）全体のなす群を $\mathrm{Mob}(\mathbb{D}^2) \subset \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2})$ であらわす．またその単位円周への拡張もメビウス変換とよび，$\mathrm{Mob}(S^1) \subset \mathrm{Homeo}(S^1)$ であらわす．切断 $\mathcal{E}$ がメビウス変換を保つとは，$\mathrm{Mob}(S^1)$ 上では $\mathcal{E}$ が自明な対応で $\mathrm{Mob}(\mathbb{D}^2)$ を像にもつことをいう．

単位円板における実現問題が肯定的であることは，Epstein により以下のように報告されている．ただし，メビウス変換を保つ切断とはなっていない．なお，微分同型に制限した準同型 $q_D : \mathrm{Diff}(\overline{\mathbb{D}^2}) \to \mathrm{Diff}(S^1)$ について，q_D の切断となる準同型が存在しないことは Ghys [g3] により示されている．したがってこの結果は，問題の興味を位相同型と微分同型の間に導く．

命題 **2.3.** 全射準同型 $q : \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2}) \to \mathrm{Homeo}(S^1)$ に対して，q の切断となる準同型 $\mathcal{E} : \mathrm{Homeo}(S^1) \to \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2})$ で互いに同値でないものが非可算無限個存在する．さらにそれらは一様収束の位相に関して連続である．

Douady-Earle [d2] による等角重心拡張は次のように定義される．$\varphi \in \mathrm{Homeo}(S^1)$ の $z \in \mathbb{D}^2$ からみた重心とは，ポアソン積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} P_w(\varphi(\zeta))|P'_z(\zeta)||d\zeta|$$

の値が 0 となる点 $w \in \mathbb{D}^2$ のことである．ここで $P_z(\zeta) = (\zeta - z)(1 - \bar{z}\zeta)^{-1}$ は z を 0 に写す単位円板の等角自己同型（メビウス変換）であり，その $\zeta \in S^1$ における微分の絶対値 $|P'_z(\zeta)| = (1 - |z|^2)|\zeta - z|^{-2}$ がポアソン核である．重心は一意的に存在するので，対応 $z \mapsto w$ により $\mathcal{DE}(\varphi)$ を定義する．この写像は $\mathcal{DE} : \mathrm{Homeo}(S^1) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{D}^2) \cap \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2})$ となる q の切断であり，等角重心拡張とよばれる．定義のしかたより $\mathcal{DE}$ はメビウス変換を保存している．さらに $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Mob}(S^1)$，$\varphi \in \mathrm{Homeo}(S^1)$ に対して

$$\mathcal{DE}(\psi_1 \circ \varphi \circ \psi_2) = \mathcal{DE}(\psi_1) \circ \mathcal{DE}(\varphi) \circ \mathcal{DE}(\psi_2)$$

が成り立つ．この性質を等角的自然性という．また一様収束の位相に関して連続である．しかし $\mathcal{DE}$ は準同型とはならない．

複素平面の領域 D から $\mathbb{C}$ への向きを保つ同相写像 f が擬等角写像であるとは，超関数の意味での偏導関数 $\partial f, \bar{\partial} f$ が存在し，歪曲係数 $\mu_f(z) := \bar{\partial} f(z)/\partial f(z)$ が $\|\mu_f\|_\infty < 1$ をみたすことである．最大歪曲度を $K_f = (1 + \|\mu_f\|_\infty)(1 - \|\mu_f\|_\infty)^{-1}$ で定義すれば，これは $K_f < \infty$ と同値である．逆に与えられた $\mu \in L^\infty(D)$ $(\|\mu\|_\infty < 1)$ に対して，それを歪曲係数としてもつ擬等角写像の存在と一意性が Ahlfors-Bers による可測リーマン写像定理である．擬等角写像はリーマン面上でも定義される．

単位円板の擬等角自己同型全体は群を成し，それを $\mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ であらわす．擬等角同型は境界 S^1 まで連続に拡張する．したがって $\mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ は $\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{D}^2})$ の部分群である．擬対称写像とは，このようにして得られる S^1 の自己同型として定義することが可能である（純粋に S^1 上の写像として特徴づけることもできる）．この全体は $\mathrm{Homeo}(S^1)$ の部分群をなし，それを $\mathrm{QS}(S^1)$ であらわす．よって全射準同型 $q_{QC} : \mathrm{QC}(\mathbb{D}^2) \to \mathrm{QS}(S^1)$ を得る．

サリバンの夢とは，この q_{QC} についての実現問題である．それは位相同型と微分同型の中間に位置し，単位円板における実現問題の理想的な形を提示するものであった．しかし最近の Epstein-Markovic [e2] の結果は，否定的な結論を与えるものであった．

定理 2.4. 準同型 $\mathcal{E}:\mathrm{QS}(S^1)\to\mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ で q_{QC} の切断となるものは存在しない．

なお，等角重心拡張 $\mathcal{DE}$ は，$\mathrm{QS}(S^1)$ に制限すれば像は $\mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ に入るので，q_{QC} の切断にもなっている．準同型にはならないが，タイヒミュラー空間論における応用上はそれで十分である場合が多い．

擬対称写像 $\varphi\in\mathrm{QS}(S^1)$ に対して，その歪曲度 $K(\varphi)$ にはいくつかの定義の方法があるが，ここでは簡単のため φ を境界値にもつ擬等角写像 $f\in\mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ に関する最大歪曲度 K_f の下限とする．部分群 $\Gamma\subset\mathrm{QS}(S^1)$ が（一様）擬対称群であるとは，ある $K\geq 1$ が存在して，すべての $\gamma\in\Gamma$ について $K(\gamma)\leq K$ が成り立つこととする．以下では，$\mathrm{Homeo}(S^1)$ の位相に関して離散的な一様擬対称群のみを考える．一方，部分群 $\Gamma\subset\mathrm{Homeo}(S^1)$ が（離散的）収束群であるとは，次の性質をもつこととする．任意の列 $\{\gamma_n\}\subset\Gamma$ に対して，ある部分列 $\{\gamma_{n(i)}\}$ とある $\xi,\eta\in S^1$ が存在して，$S^1-\{\xi\}$ 上の ζ について $\gamma_{n(i)}(\zeta)$ は広義一様に η に収束する．最大歪曲度が一様に有界な単位円板の擬等角自己同型の列の性質より，離散的一様擬対称群は離散的収束群であることがわかる．

収束群は，メビウス変換の部分群の性質を抽出した概念として Gehring，Martin，Tukia らにより定義されたものである．メビウス変換群の位相共役は収束群であるが，逆に擬等角写像，擬対称写像からなる収束群は必ずこのようにして得られるかという問題は当初よりあった．高次元の場合にそれは否定されたが，1 次元の場合にはそれが Thurston の幾何化プログラムのある部分と関連することがわかり，注目された．Tukia [t2] による大きな前進を経て，最終的には Gabai [g1]，Casson-Jungreis [c1] により解決された．

定理 2.5. 離散的収束群 $\Gamma\subset\mathrm{Homeo}(S^1)$ に対して，ある $\phi\in\mathrm{Homeo}(S^1)$ が存在して，$\phi\Gamma\phi^{-1}$ は $\mathrm{Mob}(S^1)$ の離散部分群（すなわちフックス群の S^1 への制限）となる．

この定理において，共役を与える位相同型 ϕ についての情報はない．トポロジー的な目的のためにはそれで十分であり，また閉曲面の写像類群の実現問題への応用に対してもこれで十分である．実際この定理は，ニールセン実現問題（定理 2.1）の別証明を与えるものにもなっている．しかし，収束群 Γ が一様擬対称群の場合には，共役を与える ϕ も擬対称写像にとれることは極めて重要である．2 次元球面 S^2 の一様擬等角写像群についての同様な主張は，Sullivan，Tukia [t1] により既に成功している．最近，Markovic [m2] はこの問題の解決を次のように報告している．

命題 2.6. 離散的一様擬対称群 $\Gamma\subset\mathrm{QS}(S^1)$ に対して，ある $\varphi\in\mathrm{QS}(S^1)$ が存在して，$\varphi\Gamma\varphi^{-1}$ は $\mathrm{Mob}(S^1)$ の離散部分群となる．さらに，φ の歪曲度は，Γ の歪曲度を一様に押さえる定数 K のみに依存する．

コンパクトとは限らない一般の（双曲型）リーマン面 R に対しても R の複素構造の擬等角変形空間としてタイヒミュラー空間 $T(R)$ が定義される．また，R の擬等角自己同型 $\omega:R\to R$ 全体のなす群を $\mathrm{QC}(R)$ とし，その写像類 $[\omega]$ 全体の成す群を擬等角写像類群といい，同じ記号 $\mathrm{MCG}(R)$ であらわす．すなわち，閉曲面の場合には位相的カテゴリーと擬等角カテゴリーの差はなかったが，一般のリーマン面に対してはすべて擬等角の制限を加えて同様の定義を与えるのである．このとき $\mathrm{MCG}(R)$ は $T(R)$ に双正則等長変換として作用し，表現 $\iota:\mathrm{MCG}(R)\to\mathrm{Aut}(T(R))$ を得る．一部の例外を除き ι は全単射となる（[e1]，[e3]，[m1]）．

リーマン面 R の普遍被覆 $\mathbb{D}^2\to R$ の被覆変換群をフックス群 $H\subset\mathrm{Mob}(\mathbb{D}^2)$ とする．擬等角自己同型群 $\mathrm{QC}(R)$ の $\mathbb{D}^2$ へのもち上げ全体は，$\mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ のなかでの H の正

規化群 $N_{QC}(H)$ となり，剰余群 $N_{QC}(H)/H$ は $\mathrm{QC}(R)$ と同型である．準同型 q による $N_{QC}(H)$ の像は，$\mathrm{QS}(S^1)$ のなかでの $H \subset \mathrm{Mob}(S^1)$ の正規化群 $N_{QS}(H)$ であり，この対応により全射準同型

$$q_H : N_{QC}(H)/H \to N_{QS}(H)/H$$

が誘導される．ここで，剰余群 $N_{QS}(H)/H$ は $\mathrm{MCG}(R)$ と同型であり，写像類をとる対応 $q_R : \mathrm{QC}(R) \to \mathrm{MCG}(R)$ は q_H と同値である．したがって，$G \subset \mathrm{MCG}(R)$ の q_R に関する実現問題は，$\Gamma \rhd H$ となる $\Gamma \subset \mathrm{QS}(S^1)$ の $q_{QC} : \mathrm{QC}(\mathbb{D}^2) \to \mathrm{QS}(S^1)$ に関する H-同変な実現問題に翻訳することができる．

命題 2.6 を以上のような議論に適用すると，最終的には次の結論にまとめられる．写像類の部分群がリーマン面の等角自己同型群として実現されるための必要十分条件が与えられる．

定理 **2.7.** 擬等角写像類群 $\mathrm{MCG}(R)$ の部分群 Γ のタイヒミュラー空間 $T(R)$ への作用が有界な軌道をもつならば，Γ は $T(R)$ に共通固定点をもつ．とくに準同型 $\mathcal{E}|_\Gamma : \Gamma \to \mathrm{QC}(R)$ で q_R の Γ 上の切断となるものが存在する．

§3. タイヒミュラーモジュラー変換の分類

写像類群 $\mathrm{MCG}(R)$ により幾何学的に誘導されるタイヒミュラー空間 $T(R)$ の双正則等長変換全体の成す群 $\iota(\mathrm{MCG}(R)) \subset \mathrm{Aut}(T(R))$ を，トーラスの場合のモジュラー群の拡張という意味でタイヒミュラーモジュラー群といい，$\mathrm{Mod}(R)$ であらわす．一部の例外を除き ι は全単射であるので，$\mathrm{MCG}(R) \cong \mathrm{Mod}(R) = \mathrm{Aut}(T(R))$ は同一視する場合も多い．トーラス Σ_1 の場合は，$\mathrm{MCG}(\Sigma_1) = SL(2,\mathbb{Z}), T_1 = \mathbb{H}^2$ である．このモジュラー変換は $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2)$ の元であるから，楕円型，放物型，双曲型に分類できる．これを種数 $g \geq 2$ の閉曲面のタイヒミュラー空間のモジュラー群 Mod_g に対しても同様に行ったのが Bers [b1] の分類である．すなわち，タイヒミュラーモジュラー変換 $\gamma_* \in \mathrm{Mod}_g$ について

- T_g に固定点をもつときを楕円型
- T_g の点の移動距離の下限が 0 のときを放物型
- T_g の点の移動距離の下限が正数のときを双曲型

とした．これは Thurston による写像類 $\gamma \in \mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ の分類（周期的，可約的，擬アノソフ的）とほぼ対応している．可約的な場合には，分割された部分曲面上に制限してまた周期的，擬アノソフ的であることなどに応じて，擬周期的，擬双曲型などの細分をもつ．(注：写像類としてみる場合は「‥ 的」といい，タイヒミュラーモジュラー変換としてみる場合は「‥ 型」といっている.）

一般のリーマン面 R に対してもタイヒミュラーモジュラー群の元の分類を試みる．しかし閉曲面の場合に比べてはるかに複雑なため，分類というよりは現象の列挙に留まっている．まず $\gamma_* \in \mathrm{Mod}(R)$ が楕円型であるとは，$T(R)$ に固定点をもつことと定義し，楕円型変換の特徴づけを与える．閉曲面の場合と異なり，楕円型には有限位数（周期的）のもののほかに無限位数のものも存在することに注意する．

命題 **3.1.** （1）タイヒミュラーモジュラー変換 $\gamma_* \in \mathrm{Mod}(R)$ が楕円型であるための必要十分条件は，ある点（任意の点）$p \in T(R)$ の軌道 $\langle\gamma_*\rangle(p)$ が有界なことである.（2）楕円型変換 γ_* が無限位数であるならば，ある点の軌道 $\langle\gamma_*\rangle(p)$ は集積点をもつ．

主張（1）は定理 2.7 の系である．主張（2）は，実は $\iota : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(T(R))$ が単射であることに関連している．

軌道が集積点をもつのは，$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2)$ の場合には無限位数の楕円型変換のみである．しかし $\mathrm{Aut}(T(R)) = \mathrm{Mod}(R)$ については，有界ではないが集積点をもつ軌道も存在しうる．したがって，軌道が集積点をもつことが無限位数の楕円型変換の特徴づけとはならない．ある軌道が集積点をもつようなモジュラー変換を非離散型，そうでないものを離散型とよぶことにする．離散型のうち，とくに $\lim_{n\to\pm\infty} \gamma_*^n(p) = \infty$ となるものを強離散型とよぶ．

一般のリーマン面に対する写像類 $\gamma \in \mathrm{MCG}(R)$ の分類については，閉曲面の場合には常に成立している次の性質で分けることが基本になってくる．ある非自明な単純閉曲線 c とある（境界付き）コンパクト部分曲面 W が存在して，$\langle\gamma\rangle$ の元による c の像はすべて W と交わるとき，γ を停留的であるとよぶ．たとえばデーンツイストは停留的であり，これは放物型の変換になる．一般には次が成り立つ．

命題 3.2. 写像類 $\gamma \in \mathrm{MCG}(R)$ が周期的でなく停留的であるならば，$\gamma_* \in \mathrm{Mod}(R)$ は強離散型である．

停留的である写像類の族は，最大歪曲度が一様に押さえられいる擬等角同型としての実現をもつならば，広義一様収束する部分列をもつというコンパクト性をもつ．この性質は，タイヒミュラー空間への作用を考える場合に状況を簡単にする．逆にいえば，停留的でない写像類，あるいは群として停留的でないものの考察が，リーマン面一般に関するタイヒミュラーモジュラー群の問題を難しくしている．

リーマン面 R の位相的自己同型は R のエンドまで連続に拡張するので，写像類群はエンドの集合 $\partial_e R$ に作用する．すべてのエンド（$\partial_e R$ の各点）を固定するような写像類全体からなる部分群 $P \subset \mathrm{MCG}(R)$ を純写像類群とよぶ．これは R のデーンツイストをすべて含んでいる．エンドが 3 点以上あるリーマン面 R については，P は停留的であることがわかる．

次に楕円型変換からなる部分群について考察を拡張する．部分群 $\Gamma_* \subset \mathrm{Mod}(R)$ が楕円型であるとは，Γ_* が $T(R)$ に共通固定点 p をもつことをいう．いいかえれば，対応する $\Gamma \subset \mathrm{MCG}(R)$ が，p において等角自己同型からなる部分群として実現されるということである．定理 2.7 より，Γ_* による軌道が有界であることがこのための必要十分条件である．任意の可算群に対して，それを等角自己同型群としてもつようなリーマン面 R が存在することは知られている（[g4]）．よって楕円型部分群の可能性について代数的な制約はない．

群論における Burnside の問題は，各元の位数が有限であるような無限群の存在を求めたものであるが，そのようなものの強い例として，無限群であるが，そのすべての真部分群が有限群であるような群の存在も知られている（[a1]，[o1]）．上で述べたことより，このような群もタイヒミュラーモジュラー群の楕円型部分群になりえるが，このような特殊な場合だけを除き，楕円型部分群が無限群であるならば，無限巡回群の場合と同様にある軌道が集積点をもつことがわかる．

命題 3.3. 楕円型部分群 $\Gamma_* \subset \mathrm{Mod}(R)$ が真部分群の無限降下列をもつならば，ある $p \in T(R)$ の軌道 $\Gamma_*(p)$ は集積点をもつ．

リーマン面の間に被覆写像 $R_1 \to R_2$ が存在すると，タイヒミュラー空間の間に自然な埋め込み $T(R_2) \hookrightarrow T(R_1)$ が存在する．例外的な場合を除き，埋め込みが全射であるのは，被覆が自明である場合に限ることがわかる．この事実から命題 3.3 は従う．

§4. 安定性とモジュライ空間

種数 g の閉曲面のモジュライ空間 M_g とは，Σ_g に入る複素構造 σ 全体の集合であり，その各種の構造は，タイヒミュラー空間 $T_g = \{[\sigma, f]\}$ からの射影により誘導される．射影 $\pi : T_g \to M_g$ は写像 f を忘れることであるから，タイヒミュラーモジュラー群による商をとる操作であり，$M_g = T_g/\operatorname{Mod}_g$ とあらわせる．この場合，Mod_g は T_g に不連続に作用する（とくに固定化群は有限群となる）ので，商空間 M_g の構造は理解しやすい．一般のリーマン面 R に対するモジュライ空間 $M(R)$ は，R の複素構造と擬等角同値な複素構造全体の集合であり，同様にしてタイヒミュラー空間 $T(R)$ のモジュラー群 $\operatorname{Mod}(R)$ による商空間 $M(R) = T(R)/\operatorname{Mod}(R)$ となる．しかし前節でみたように，$\operatorname{Mod}(R)$ の作用は複雑であり，一般には不連続ではないことも知られている．

非離散型変換 $\gamma_* \in \operatorname{Mod}(R)$ による軌道 $\langle\gamma_*\rangle(p)$ は集積点をもつので，その閉包 $\overline{\langle\gamma_*\rangle(p)}$ は完全集合になり，とくに非可算集合となる．一方，軌道自身は可算集合であるから，$\overline{\langle\gamma_*\rangle(p)} - \langle\gamma_*\rangle(p)$ に属する点が存在する．適当な仮定のもとではこの現象は，異なる複素構造でありながら任意に近いものの存在を意味する．このような場合，モジュライ空間 $M(R)$ は位相空間として T_1-分離公理をみたさないものになる．そこでこのような不便な部分を除外し，よい点だけに制限して商をとることを考える．よい点の集合の条件としては，タイヒミュラー距離から誘導される距離が商に入ることを要請する．

定義 4.1. 擬等角写像類群の部分群 $\Gamma \subset \mathrm{MCG}(R)$ のタイヒミュラー空間への作用について，$p \in T(R)$ が安定点 であるとは，軌道 $\Gamma_*(p)$ が閉集合であり，かつ Γ_* における p の固定化群が有限であることをいう．安定点全体の集合を $\Phi(\Gamma)$ であらわし，安定領域とよぶ．とくに $\Gamma = \mathrm{MCG}(R)$ の場合は単に Φ とかく．

停留的な $\Gamma \subset \mathrm{MCG}(R)$ については $\Phi(\Gamma) = T(R)$ が成り立つ．写像類群全体でみても，安定点は次の意味で通有的に存在する．

定理 4.2. 安定領域 $\Phi \subset T(R)$ は稠密な連結開集合である．

なお，安定性より強い条件として，$\Gamma \subset \mathrm{MCG}(R)$ のタイヒミュラー空間への作用が $p \in T(R)$ において不連続であることも通常どおり定義できる．不連続点全体の集合を $\Omega(\Gamma)$ であらわし，不連続領域とよぶ．とくに $\Gamma = \mathrm{MCG}(R)$ の場合 Ω とかく．リーマン面 R が双曲計量に関するある有界性の条件をみたしていれば（たとえば閉リーマン面の非自明な正規被覆面などはこれをみたす），$\Phi = \Omega$ であることが知られている．

安定領域に制限して商空間 $M_\Phi(R) = \Phi/\operatorname{Mod}(R) \subset M(R)$ を考える．タイヒミュラー距離から決まる $M(R)$ 上の擬距離 d_M は，安定性の第一の条件より $M_\Phi(R)$ 上では距離になる．この d_M により，$M_\Phi(R)$ 内の曲線の長さを定義し，2 点間を結ぶ曲線の長さの下限で新しく $M_\Phi(R)$ に距離 d_M^i を定める．このとき明らかに $d_M \le d_M^i$ ではあるが，局所的には両者は比較可能であることが示せる．一方，$T(R)$ 上の点の間に，通常の $\operatorname{Mod}(R)$ の作用による同値関係より弱い次の閉包同値の関係 $\sim$ を導入する．2 点 p, $q \in T(R)$ が $\overline{\operatorname{Mod}(R)(p)} = \overline{\operatorname{Mod}(R)(q)}$ をみたすとき，$p \sim q$ とする．閉包同値による商空間を $T(R)/\!/\operatorname{Mod}(R)$ のようにあらわす．

定理 4.3. モジュライ空間の部分領域 $M_\Phi(R)$ の距離 d_M^i に関する完備化 $\overline{M_\Phi(R)}$ は，閉包同値による商空間 $T(R)/\!/\operatorname{Mod}(R)$ と同型である．

リーマン面 R 上の正則 2 次微分形式 $\omega(z)dz^2$ で，$\|\omega\|_1 := \int_R |\omega(z)|dxdy$ が有限であるもの全体のなすバナッハ空間を $A(R)$ とかく．2 つのリーマン面 R_1, R_2 が双正則同型

であるならば，$A(R_1)$ と $A(R_2)$ は等長同型であるが，一部の例外を除き，その逆も成り立つことが Markovic [m1] により証明された．(実は $\iota : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(T(R))$ の全射性もこの結果を使って導かれる．) つまり，可積分微分形式の空間 $A(R)$ はモジュライ空間 $M(R)$ の各点を区別する完全な指標になっている．同じことを $T(R)/\!/\operatorname{Mod}(R)$ についてみた場合，どのような指標が考えられるだろうか？　しかもそれは，このモジュライ空間の点をわかりやすく表現するものが望ましい．容易にわかる例としては，R 上の全部の単純閉測地線の長さの集合 ($\subset \mathbb{R}$) の閉包（測地線スペクトル）などがある．可積分微分形式の空間の２重の双対空間 $A^{**}(R)$（これはタイヒミュラー空間 $T(R)$ の基点における余接空間に相当する）はどうであろうか？

§5. 対称写像とその一般化

擬対称写像 $\varphi \in \mathrm{QS}(S^1)$ のうち，

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\varphi(e^{i(x+t)}) - \varphi(e^{ix})|}{|\varphi(e^{ix}) - \varphi(e^{i(x-t)})|} = 1$$

が x に依らずに一様に成り立つものを対称写像という．たとえば単位円周の微分自己同型は対称写像である．一方，単位円板の擬等角写像 $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ のうち，歪曲係数 μ_f が $\lim_{r\to 1} \operatorname{ess.sup}_{|z|>r} |\mu_f(z)| = 0$ をみたすものを漸近的等角写像という．漸近的等角自己同型の全体 $\mathrm{QC}_0(\mathbb{D}^2)$ は $\mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ の部分群をなす．漸近的等角自己同型は単位円周の対称写像に拡張し，逆に任意の対称写像はそのようにして得られる．よって単位円周の対称写像全体のなす部分群 $\mathrm{QS}_0(S^1) \subset \mathrm{QS}(S^1)$ への全射準同型 $q_0 : \mathrm{QC}_0(\mathbb{D}^2) \to \mathrm{QS}_0(S^1)$ が得られる．なお，擬対称写像の歪曲度（あるいはタイヒミュラー距離）から定まる位相を $\mathrm{QS}(S^1)$ に入れたとき，$\mathrm{QS}(S^1)$ は位相群にはならないが，$\mathrm{QS}_0(S^1)$ は位相群になり，またこの位相で閉じている（[g2]).

この q_0 に関する実現問題については不明である．しかし応用上重要なことは，等角重心拡張 $\mathcal{DE} : \mathrm{QS}(S^1) \to \mathrm{QC}(\mathbb{D}^2)$ による $\mathrm{QS}_0(S^1)$ の像はまた $\mathrm{QC}_0(\mathbb{D}^2)$ に入るということである（[e6]). 等角重心拡張は一様収束に関して連続であるので，$\mathrm{QS}_0(S^1)$ は一様収束の位相に関して閉じていないこともわかる．

リーマン面 R に対しても同様にして $\mathrm{QC}_0(R)$ と $\mathrm{MCG}_0(R)$ を定義する．ただし，単位円板での漸近的等角写像の定義にフックス群 H に関する同変性を付け加えたものが，$R = \mathbb{D}^2/H$ の漸近的等角写像になるのではない．面の無限遠の近傍（コンパクト集合の外側）で等角写像に漸近するものとして定義しなければならない．漸近的等角写像類群 $\mathrm{MCG}_0(R)$ についても同じである．こうして全射準同型 $q_0 : \mathrm{QC}_0(R) \to \mathrm{MCG}_0(R)$ が得られる．等角重心拡張の等角的自然性より，それはまた q_0 の切断を定めることがわかる．

タイヒミュラー類 $[f] \in T(R)$ で，漸近的等角写像 f を代表元としてもつもの全体を $T_0(R)$ とかき，漸近的等角類空間とよぶ．これはタイヒミュラー空間 $T(R)$ の閉部分空間になっている．漸近的等角写像類群 $\mathrm{MCG}_0(R)$ は $T_0(R)$ を不変に保つ．タイヒミュラー類の定義において，「等角写像」を「漸近的等角写像」に置き換えてとったより大きな同値類を漸近的タイヒミュラー類，その全体の集合を漸近的タイヒミュラー空間といい，$AT(R)$ であらわす．射影 $\alpha : T(R) \to AT(R)$ に対して，$AT(R)$ の基点の上のファイバーが $T_0(R)$ である．漸近的タイヒミュラー空間 $AT(R)$ には，α が正則になるような複素構造と，α によって $T(R)$ から誘導されるものと一致する距離構造が入ることが示されている（[e3]，[e4]）.

擬等角写像類群 $\mathrm{MCG}(R)$ の $T(R)$ への作用は α により $AT(R)$ の双正則等長変換に落ちる．したがって準同型 $\iota_A : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(AT(R))$ を得る．この核 $K := \mathrm{Ker}\,\iota_A$ を漸近的自明写像類群という．また $\iota_A(\mathrm{MCG}(R)) = \mathrm{Mod}_A(R)$ とかく（名前はまだない）．漸近的等角写像類群 $\mathrm{MCG}_0(R)$，純写像類群 P との関係は $K \subset \mathrm{MCG}_0(R) \cap P$ である（実際は一致すると思う）．また $\iota_A(\mathrm{MCG}_0(R)) \cong \mathrm{MCG}_0(R)/K$ は $AT(R)$ の基点の $\mathrm{Mod}_A(R)$ に関する固定化群である．ただし，$\mathrm{Mod}_A(R)$ は $AT(R)$ に推移的には作用していないので，異なる点の固定化群は互いに同型ではない．

タイヒミュラー空間の場合は，固定化群はリーマン面の等角自己同型群として実現できた．その類推として次の問題を提示する．

問題 **5.1.** 漸近的タイヒミュラー空間の基点を固定する双正則等長変換群 $\iota_A(\mathrm{MCG}_0(R))$ の部分群を幾何学的に実現せよ．

たとえば，リーマン面として複素平面 $\mathbb{C}$ から単位区間上の 1/3-カントール集合 Λ を除いたものを考え，それと擬等角同値な R で，無限遠点を除く各エンドの近傍が互いに等角同値になるものをとる．このとき，エンド（Λ の点）の順序を保つ $\mathrm{MCG}_0(R)$ の部分群を L とすれば，$\iota_A(L) = L/K$ は Thompson 群と同型になる．Thompson 群は単位区間の２進的分割に対応して与えられる区分的線形写像のなす群として実現される（[d1]）．

前節でみたような $\mathrm{MCG}(R)$ の $T(R)$ への作用の分析は，$\mathrm{Mod}_A(R)$ の $AT(R)$ への作用と，各ファイバーへの作用とに分解して行なうことができる．前者ではまた，タイヒミュラー空間の場合と平行な議論が展開できるのであるが，簡素化される点はあまりないように思える．それに対して後者には，漸近的等角性が影響するいくつかの現象がみられるようである．最後にこの問題に関する予測を述べる．

安定点の定義における固定化群の有限性を無視し，次のような弱安定性の条件を考える．部分群 $\Gamma \subset \mathrm{MCG}(R)$ がタイヒミュラー空間 $T(R)$ の Γ-不変閉部分空間 W に弱安定的に作用するとは，任意の点 $p \in W$ の軌道 $\Gamma(p)$ が閉集合になることと定義する．このとき商空間 W/Γ は距離空間になる．

予想 **5.2.** 漸近的等角類空間 $T_0(R)$ に漸近的等角写像類群 $\mathrm{MCG}_0(R)$ は弱安定的に作用する．

部分的解答としては，$\mathrm{MCG}_0(R)$ の任意のアーベル部分群 Γ は $T_0(R)$ に弱安定的に作用することなどがいえる．また，$\mathrm{MCG}_0(R)$ が写像類群全体 $\mathrm{MCG}(R)$ に一致するようなリーマン面 R の例もあり，このような場合にはより強く，任意の点の軌道が離散的であることもわかっている．

参考文献

[a1] S. Adjan and I. Lysionok, *On groups all of whose proper subgroups are finite cyclic*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), 933–990 (Russian); English translation in Math. USSR. Izv. **39** (1992) 905–957.

[b1] L. Bers, *An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston*, Acta Math. **141** (1978), 73–98.

[c1] A. Casson and D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 441–456.

[d1] E. de Faria, F. Gardiner and W. Harvey, *Thompson's group as a Teichmüller mapping class group*, In the tradition of Ahlfors and Bers III, Contemp. Math., vol. 355, AMS, 2004, pp. 165–185.

[d2] A. Douady and C. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23–48.
[e1] A. Epstein, *Effectiveness of Teichmüller modular groups*, In the tradition of Ahlfors and Bers, Contemp. Math., vol. 256, AMS, 2000, pp. 69–74.
[e2] D. Epstein and V. Markovic, *Extending homeomorphisms of the circle to quasiconformal homeomorphisms of the disk* (preprint).
[e3] C. Earle and F. Gardiner, *Geometric isomorphisms between infinte dimensional Teichmüller spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 1163–1190.
[e4] C. Earle, F. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part I: the complex structure*, In the tradition of Ahlfors and Bers, Contemp. Math., vol. 256, AMS, 2000, pp. 17–38.
[e5] C. Earle, F. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part II: the metric structure*, In the tradition of Ahlfors and Bers III, Contemp. Math., vol. 355, AMS, 2004, pp. 187–219.
[e6] C. Earle, V. Markovic and D. Saric, *Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space*, Complex manifolds and hyperbolic geometry, Contemp. Math., vol. 311, AMS, 2002, pp. 87–105.
[g1] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups*, Ann. of Math. **136** (1992), 447–510.
[g2] F. Gardiner and D. Sullivan, *Symmetric structures on a closed curve*, Amer. J. Math. **114** (1992), 683–736.
[g3] E. Ghys, *Prolongements des diffiomorphismes de la sphère*, Enseign. Math. **37** (1991), 45–59.
[g4] L. Greenberg, *Conformal transformations of Riemann surfaces*, Amer. J. Math. **82** (1960), 749–760.
[i1] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer, 1992.
[k1] S. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. **117** (1983), 235–265.
[m1] V. Markovic, *Biholomorphic maps between Teichmüller spaces*, Duke Math. J. **120** (2004), 405–431.
[m2] V. Markovic, *Quasisymmetric groups* (preprint).
[m3] V. Markovic, *Realization of the mapping class group by homeomorphisms* (preprint).
[m4] S. Morita, *Geometry of characteristic classes*, Translations of Math. Monographs, vol. 199, AMS, 2001.
[o1] A. Ol'shanskii, *Groups of bounded period with subgroups of prime order*, Algebra i Logika **21** (1982), 553–618 (Russian); English translation in Algebra and logic **21** (1982) 369–418.
[t1] P. Tukia, *On two-dimensional quasiconformal groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **5** (1980), 73–78.
[t2] P. Tukia, *Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups*, J. Reine Angew. Math. **391** (1988), 1–54.