絶対連続タイヒミュラー空間と関数空間

松崎 克彦　(早稲田大学 教育・総合科学学術院)*

1 序

普遍タイヒミュラー空間は，擬等角写像によって定式化されるすべてのタイヒミュラー空間を内包する全体空間であり，それは実軸 $\mathbb{R}$ 上の正規化された擬対称同相写像全体の成す空間とみなすことができる．その擬対称写像の滑らかさの程度によって，普遍タイヒミュラー空間に含まれる部分空間は 2 つの方向に分かれる．リーマン面のタイヒミュラー空間は典型的には全特異な擬対称写像の空間であり，関数空間のタイヒミュラー空間と呼べるものの多くは絶対連続な擬対称写像の空間である．

これらの普遍タイヒミュラー空間の部分空間は，上で述べたように擬対称同相写像で表されるほか，擬等角写像の複素歪曲度，等角写像の（前）シュワルツ微分，円周の擬等角写像の像である擬円周などにより定義可能である．与えられた特別なタイヒミュラー空間の構造に関する研究の第一歩は，これらの異なる表現の間の対応関係を与えることから始まる．加えて，絶対連続な擬対称写像 f の族が定めるタイヒミュラー空間については，その微分 $\log f'$ がある関数空間を成し，これを用いて，より簡潔な，あるいは，解析的に興味深い構造をタイヒミュラー空間に与えることが可能となる．

この原稿では，絶対連続な擬対称写像がつくるタイヒミュラー空間のいくつかの重要な例について，上記のようなタイヒミュラー空間の様々な表現の同一視がどのように効果的に働くかを説明する．扱う空間としては具体的にはヴェイユ・ピーターソンタイヒミュラー空間と BMO タイヒミュラー空間がある．また，BMO タイヒミュラー空間の中に弦弧曲線と呼ばれる特別な擬円周によって定められる領域を考え，その空間の構造に関する問題をタイヒミュラー空間論を用いて考察する．

技術的には，擬フックス群の変形空間の理論で用いられるベアスの同時一意化と呼ばれる方法を曲線族の解析に用いる．これにより，ヴェイユ・ピーターソン曲線や弦弧曲線のような特別な擬円周 Γ の族が，対応するタイヒミュラー空間の直積で座標付けされる．さらに，曲線への擬対称埋め込み $g : \mathbb{R} \to \Gamma \subset \mathbb{C}$ の微分の $\log g'$ がなす関数空間との間の双正則な関係が証明できる．また，この方法の応用として，ヴェイユ・ピーターソン曲線や弦弧曲線のリーマン写像による曲線パラメーターの弧長パラメーターに関する（不）連続性の問題について新しい解釈を与えることができる．

---

* e-mail: matsuzak@waseda.jp

本研究は科研費 (課題番号:18H01125 および 21F20027) の助成を受けたものである。
2020 Mathematics Subject Classification: Primary 32G15, 30C62, 30H35; Secondary 42A45, 26A46, 46G20

2 普遍タイヒミュラー空間の種々のモデルと絶対連続な部分空間

実軸 $\mathbb{R}$ の向きを保つ自己同相写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が**擬対称写像**であるとは，ある定数 $M\geq 1$ が存在して，任意の隣接する長さが同じ区間 $I_1, I_2\subset\mathbb{R}$ に対して $M^{-1}\leq |f(I_1)|/|f(I_2)|\leq M$ が成り立つことで定義する．この性質が上半平面 $\mathbb{U}$ の擬等角自己同相写像の $\mathbb{R}$ への連続拡張で与えられる写像のみたすべき必要十分条件であることは [2] で示された．とくに，f を $\mathbb{U}$ の擬等角自己同相写像に拡張する方法は **Beurling–Ahlfors 拡張**とよばれる明示的な公式を与えている．よって，擬対称性は擬等角拡張性から定義することも可能である．$\mathbb{R}$ の擬対称写像のうち，正規化条件（$0,1,\infty$ を固定するもの）をみたすものの全体を QS と表す．**普遍タイヒミュラー空間** T は $T=\mathrm{QS}$ と定義されるものである．QS は写像の合成を演算として群をなす．また，擬対称定数 M を用いて位相を定義して，それが T の位相と同値となることも知られているが（[9] 参照），ここでは問題にしない．

上半平面 $\mathbb{U}$ 上のベルトラミ係数の空間を $M(\mathbb{D})=\{\mu\in L^\infty(\mathbb{U})\mid \|\mu\|_\infty<1\}$ とする．ベルトラミ方程式の解の存在と一意性から $\mu\in M(\mathbb{U})$ と μ を複素歪曲係数 $f_{\bar z}/f_z$ としてもつ $\mathbb{U}$ の正規化された擬等角写像自己同相写像 f が一対一に対応する．擬等角写像あるいはベルトラミ係数の空間から T を定義するためには，$\mathbb{R}$ 上での境界値が一致するという同値関係（**タイヒミュラー同値**）による商空間を取ればよい．商写像 $\pi: M(\mathbb{U})\to T\cong\mathrm{QS}$ をタイヒミュラー射影という．

次のように $M(\mathbb{U})$ から誘導される T の位相を**タイヒミュラー位相**とよぶ．$\{f_n\}\subset \mathrm{QS}\cong T$ が f に収束するのは

$$\inf\|\mu(F_n\circ F^{-1})\|_\infty\to 0\quad (n\to\infty)$$

となるときと定める．ここで，下限は f_n, f のすべての擬等角拡張 F_n, F に関してとり，$\mu(\cdot)$ は擬等角写像の複素歪曲係数を表す．同様にしてタイヒミュラー距離も定義できるが，この位相はタイヒミュラー距離の定める位相にほかならない．また，$M(\mathbb{U})$ からの π による商位相と一致することがこの場合にはわかる．

$\mu\in M(\mathbb{U})$ に対して，f_μ を $\mathbb{C}$ の正規化された擬等角自己同相写像で，下半平面 $\mathbb{L}$ では等角写像となっている（$\mathbb{U}$ では複素歪曲度 μ をもつ）ものとする．この対応から定まる以下の 3 つの対象について考える：(a) 擬円周 $f_\mu(\mathbb{R})$；(b) $\log(f_\mu|_{\mathbb{L}})'$；(c) シュワルツ微分

$$S_{f_\mu|_{\mathbb{L}}}=(\log(f_\mu|_{\mathbb{L}})')''-\frac{1}{2}\{(\log(f_\mu|_{\mathbb{L}})')'\}^2.$$

これらはすべて代表元 μ の取り方によらず，タイヒミュラー同値類 $[\mu]\in T$ に対して定義できるものである．

一般に，無限遠を通るジョルダン曲線 Γ が**擬円周**であるとは，幾何的には Γ 上の任意の 2 点間に挟まれる部分の直径が，2 点間の距離の一様な定数倍で押さえられることで定義する．これは Γ が $\mathbb{C}$ の擬等角自己同相写像による $\mathbb{R}$ の像であることと同値である．

上記より，無限遠を通る擬円周のアファイン変換による同値類全体の集合 $\mathcal{C}$ が T と同一視できる．

下半平面 $\mathbb{L}$ 上の正則関数からなる空間で次のものを用意する：

$$B(\mathbb{L}) = \{\phi \mid \|\phi\|_B = \sup_{z\in\mathbb{L}} (\mathrm{Im}z)|\phi'(z)| < \infty\};$$
$$A(\mathbb{L}) = \{\varphi \mid \|\varphi\|_A = \sup_{z\in\mathbb{L}} (\mathrm{Im}z)^2|\varphi(z)| < \infty\}.$$

上で与えた $\log(f_\mu|_{\mathbb{L}})'$，$S_{f_\mu|_{\mathbb{L}}}$ はそれぞれ $B(\mathbb{L})$，$A(\mathbb{L})$ に属することが知られている．$A(\mathbb{L})$ は上記のノルムで複素バナッハ空間となり，$B(\mathbb{L})$ は定数の差を無視すれば上記のノルムで複素バナッハ空間となる．また，$\phi \in B(\mathbb{L})$ に対して $j(\phi) = \phi'' - (\phi')^2/2$ と定めると $j : B(\mathbb{L}) \to A(\mathbb{L})$ は正則写像である．

命題 1　（1）$\alpha : M(\mathbb{U}) \to A(\mathbb{L})$ を $\alpha(\mu) = S_{f_\mu|_{\mathbb{L}}}$ により定めると，α は正則写像である．（2）α は像の各点において局所的に正則な逆写像をもつ．（3）$\alpha \circ \pi^{-1} : T \to A(\mathbb{L})$ が単射として定義でき，像の上への同相写像となる．

$\alpha \circ \pi^{-1} : T \to A(\mathbb{L})$ を**ベアス埋め込み**という．これにより，T に複素バナッハ空間の領域としての複素構造が導入できる．また，$\beta : M(\mathbb{U}) \to B(\mathbb{L})$ を $\beta(\mu) = \log(f_\mu|_{\mathbb{L}})'$ により定めると，命題 1 と同じ主張が β についても成立する．$j \circ \beta = \alpha$ であり，j は $\beta(M(\mathbb{U}))$ に制限すれば $\alpha(M(\mathbb{U}))$ の上への双正則同相写像であることもわかるので，α と β により T に導入された複素構造は双正則同値である．

抽象的に X という性質で規定される普遍タイヒミュラー空間 T の部分空間 T_X について考える．T_X は以下の対象を適切に与えることにより定義することができる．

- $\mathbb{R}$ の擬対称写像の部分群 $\mathrm{QS}_X \subset \mathrm{QS}$;
- ノルム $\|\cdot\|_X$ をもつベルトラミ係数の空間 $M_X(\mathbb{U}) \subset M(\mathbb{U})$；
- 擬円周の部分族 $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{C}$;
- ノルム $\|\cdot\|_{A_X}$ をもつ正則関数の複素バナッハ空間 $A_X(\mathbb{L}) \subset A(\mathbb{L})$;
- ノルム $\|\cdot\|_{B_X}$ をもつ正則関数の複素バナッハ空間 $B_X(\mathbb{L}) \subset B(\mathbb{L})$.

なお，上記のノルムは T の場合よりも強いものに設定する必要がある．

タイヒミュラー空間 T_X を集合レベルで定式化するには，T の場合に上の対象の間の関係を与えた写像を T_X の場合に制限したときに，正しい対応関係になっていることをみる．その上で各対応関係が構造と整合性があることを示すが，とくに T_X の複素構造については，命題 1 に対応して，次の命題を調べることが必要になる．

主張 1　(i) $\alpha(M_X(\mathbb{U}))$ は $A_X(\mathbb{L})$ に含まれる開集合である；(ii) T_X の位相を $M_X(\mathbb{U})$ からのタイヒミュラー位相としたとき，$\alpha \circ \pi^{-1} : T_X \to \alpha(M_X(\mathbb{U}))$ は同相写像である．

具体的な T_X と対応する集合については，次節以降にヴェイユ・ピーターソンタイヒ

ミュラー空間 T_p と BMO タイヒミュラー空間 T_b について解説する．また，円周上のヘルダー連続な微分をもつ微分同相写像がつくるタイヒミュラー空間の研究は [10] で行われている．

QS_X が局所絶対連続な擬対称写像からなる場合，対応するタイヒミュラー空間 T_X を総称して**絶対連続タイヒミュラー空間**ということにする．この場合，すべての $f \in \mathrm{QS}_X$ からできる $\log f'$ の属する適切な $\mathbb{R}$ 上の実数値関数の関数空間 $\mathcal{B}_X(\mathbb{R})$ （実バナッハ空間）が，新たに T_X の構造を与える対象として加えられる．$\mathcal{B}_X(\mathbb{R})$ を複素化して，複素数値関数の空間 $\widehat{\mathcal{B}}_X(\mathbb{R})$ として用いる．このとき，正則関数の空間 $B_X(\mathbb{L})$ との関係として次の命題が要請される．典型的には，ハーディー空間に類する関数空間と，その境界値関数のセゲー射影についての性質を考える．

主張 2　$\mathbb{L}$ 上の正則関数の $\mathbb{R}$ 上での境界値（ほとんどいたるところでの非接極限）をとる対応は，線形写像 $b : B_X(\mathbb{L}) \to \widehat{\mathcal{B}}_X(\mathbb{R})$ を定め，b は像の上へのバナッハ同型な有界線形作用素となる．

さらに，$\mathcal{C}_X$ に属する曲線に適切なパラメーター付けをして，埋め込み $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ からなる集合をつくる．同時一意化の方法により，その全体 $\widehat{\mathcal{C}}_X$ を $T_X(\mathbb{U}) \times T_X(\mathbb{L})$ と同一視して曲線族に複素構造を導入する．考えるべき問題は以下のような命題となる．

主張 3　写像 $L : \widehat{\mathcal{C}}_X \cong T_X(\mathbb{U}) \times T_X(\mathbb{L}) \to \widehat{\mathcal{B}}_X(\mathbb{R})$ が $g \mapsto \log g'$ により定まり，L は像の上への双正則同相写像である．

QS_X は $\widehat{\mathcal{C}}_X \cong T_X(\mathbb{U}) \times T_X(\mathbb{L})$ の対角線に相当する実解析的部分多様体となるので，この主張の双正則写像 L を QS_X に制限すれば，$L : \mathrm{QS}_X \cong T_X \to \mathcal{B}_X(\mathbb{R})$ が像の上への実解析的な同相写像となる．これにより，T_X にはその複素構造とは実解析的に同値な実バナッハ空間の領域としての解析的構造が入ることがわかる．

3　ヴェイユ・ピーターソンタイヒミュラー空間と曲線

この節では，前節のおわりに述べた抽象的な絶対連続タイヒミュラー空間 T_X に関する議論を，具体的にヴェイユ・ピーターソンタイヒミュラー空間に対して説明する．ヴェイユ・ピーターソン計量はコンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間の研究において重要な役割を果たしている．これとは別の方向として，普遍タイヒミュラー空間 T（の部分空間）にこの計量を導入する研究が Cui [6] により初めてなされ，その後，Takhtajan–Teo [19] は T にヒルベルト多様体の構造を入れて，その上でのヴェイユ・ピーターソン計量の曲率に関する研究を行った．複素解析的なタイヒミュラー空間論の枠組みでの研究は Shen を中心としてその共著者たちが今日まで強力に推し進めている．

ヴェイユ・ピーターソン曲線とは，このタイヒミュラー空間に対応する擬円周のことである．最近，Bishop [3] はこの曲線に関する包括的な研究を行い，複素解析，平面幾何，

曲面論，３次元双曲幾何など様々な観点からの特徴付けを与えている．また，Wang [21] は SLE 理論の研究のなかで，曲線のレブナーエネルギーを定義し，ヴェイユ・ピーターソン曲線であることの同値条件はこのエネルギーが有限であることを証明した．

実数 $p \geq 1$ に対して，$M_p(\mathbb{U})$ をベルトラミ係数 $\mu \in M(\mathbb{U})$ で上半平面 $\mathbb{U}$ の双曲計量に関して p 乗可積分なもの全体の空間とする：

$$M_p(\mathbb{U}) = \{\mu \in M(\mathbb{U}) \mid \|\mu\|_p = \left(\int_{\mathbb{U}} \frac{|\mu(z)|^p}{(\mathrm{Im} z)^2} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

ここで，ノルムは $\|\mu\|_p + \|\mu\|_\infty$ を採用する．p–**ヴェイユ・ピータソンタイヒミュラー空間** $T_p = T_p(\mathbb{U})$ は $\mathcal{M}_p(\mathbb{U})$ のタイヒミュラー同値による商空間である．$M_p(\mathbb{U})$ からのタイヒミュラー位相を与える．$p \geq 2$ の場合は，タイヒミュラー射影 $\pi : M_p(\mathbb{U}) \to T_p$ に関する商位相と同じである．

T_p のベアス埋め込みを実現する正則関数の複素バナッハ空間を用意する：

$$A_p(\mathbb{L}) = \{\varphi \in A(\mathbb{L}) \mid \|\varphi\|_{A_p} = \left(\int_{\mathbb{L}} \frac{|\varphi(z)|^p}{(\mathrm{Im} z)^{2-2p}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

これに対して，２節の主張 1 が証明でき，T_p は $A_p(\mathbb{L})$ にベアス埋め込みをもつ．とくに T_p $(p \geq 1)$ は複素バナッハ空間の領域としての構造をもつことが示せる（[24] 参照）．

p–ヴェイユ・ピータソン擬対称写像族 QS_p は，擬対称写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で $\mathbb{U}$ への擬等角拡張 F の複素歪曲度が $M_p(\mathbb{U})$ に属するもの全体とする．これは群構造をもつことが示せる．同一視 $T_p \cong \mathrm{QS}_p$ により位相を与えれば，位相群であることもわかる．

QS_p に属する擬対称写像は局所絶対連続であり，従って T_p は絶対連続タイヒミュラー空間である．これは $p = 2$ の場合に Shen [14] によって次の結果として示された：擬対称写像 $f \in \mathrm{QS}$ が QS_2 に属するための必要十分条件は，f が局所絶対連続で，$\log f'$ がソボレフ空間 $H^{1/2}(\mathbb{R})$ に属することである．この結果は以下で述べるように一般の $p > 1$ に拡張されていて，$H^{1/2}(\mathbb{R})$ に対応するものは p–ベゾフ空間 $\mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ となる．ここで，$\mathbb{R}$ 上の実数値局所可積分関数 ϕ のなす p–**ベゾフ空間**を

$$\mathcal{B}_p(\mathbb{R}) = \{\phi \mid \|\phi\|_{\mathcal{B}_p} = \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|\phi(s) - \phi(t)|^p}{|s-t|^2} dsdt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

として定義する．等質的，すなわち，定数関数の差を無視することにより，上記のノルムで実バナッハ空間となる．複素数値関数に拡張して複素化した複素バナッハ空間を $\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{R})$ とする．[20, 24] では次が証明されている．

定理 2　$p > 1$ に対して，擬対称写像 $f \in \mathrm{QS}$ が QS_p に属するための必要十分条件は，f が局所絶対連続で，$\log f'$ が p–ベゾフ空間 $\mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ に属することである．

十分条件の証明に関して，とくに [22] では，$f \in \mathrm{QS}_p$ の擬等角拡張として，Beurling–Ahlfors 拡張に使う畳み込み積の核を熱方程式に由来するガウス核に取り替えた

Fefferman–Kenig–Pipher [7] による拡張が求めるものを与えていることを示している．一方，必要性の証明は，$\mu \in M_p(\mathbb{U})$ に対する $\mathbb{L}$ 上の等角写像 $f_\mu|_{\mathbb{L}}$ からつくる $\log(f_\mu|_{\mathbb{L}})'$ が属する関数空間と，$\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{R})$ の関係を調べることにより証明される．

下半平面 $\mathbb{L}$ 上の正則関数 ϕ のなる p–**解析的ベゾフ空間**を

$$B_p(\mathbb{L}) = \{\phi \in B(\mathbb{L}) \mid \|\phi\|_{B_p} = \left(\int_{\mathbb{L}} \frac{|\phi'(z)|^p}{(\mathrm{Im} z)^{2-p}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

として定義する．このとき，$\log(f_\mu|_{\mathbb{L}})' \in B_p(\mathbb{L})$ となること，および $\beta : M_p(\mathbb{U}) \to B_p(\mathbb{L})$ に関して命題 1 に相当することを示すことができる（[16] 参照）．また，$B_p(\mathbb{L})$ と $\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{R})$ の関係について，主張 2 の結果が成り立つことが知られている（[28] 参照）．

次に p–**ヴェイユ・ピーターソン曲線**についてみる．これは簡単に言えば $\mu \in M_p(\mathbb{U})$ $(p \geq 1)$ によって定まる無限遠を通るジョルダン曲線 $f_\mu(\mathbb{R})$ のことであり，この曲線族を $\mathcal{C}_p$ で表す．しかし，実際には曲線を $\mathbb{R}$ の埋め込みの像としてだけみるのではなく，パラメーター付きで考えることが便利である．

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が p–**ヴェイユ・ピーターソン埋め込み** $(p \geq 1)$ であるとは, $\mathbb{C}$ の正規化された擬等角自己同相写像 G でその複素歪曲度の $\mathbb{U}$, $\mathbb{L}$ への制限 μ_1, μ_2 がそれぞれ $\mathcal{M}_p(\mathbb{U})$, $\mathcal{M}_p(\mathbb{L})$ に属するものが存在して，γ が G の $\mathbb{R}$ への制限となっていることである．これらの埋め込みの全体を $\widehat{\mathcal{C}}_p$ で表す．正規化された擬等角自己同相写像 $G = G(\mu_1, \mu_2)$ は $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{U}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{L})$ から一意的に存在するが，$\gamma = G(\mu_1, \mu_2)|_{\mathbb{R}}$ はタイヒミュラー類 $[\mu_1] \in T_p(\mathbb{U})$，$[\mu_2] \in T_p(\mathbb{L})$ によって定まる．よって，$\widehat{\mathcal{C}}_p$ は $T_p(\mathbb{U}) \times T_p(\mathbb{L})$ と同一視できる．これを曲線の同時一意化とよび，タイヒミュラー空間の直積による $\widehat{\mathcal{C}}_p$ の表現をベアス座標とよぶことにする．

前節の主張 3 に相当する結果は [25] において次のように与えられる．

定理 3　任意の p–ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(p > 1)$ について $\log \gamma'$ は $\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{R})$ に属する．また，この対応 $\gamma \mapsto \log \gamma'$ により定まる写像

$$L : \widehat{\mathcal{C}}_p \cong T_p(\mathbb{U}) \times T_p(\mathbb{L}) \to \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{R})$$

は像の上への双正則同相写像である．

QS_p は $\widehat{\mathcal{C}}_p \cong T_p(\mathbb{U}) \times T_p(\mathbb{L})$ の対角線に相当する実解析的部分多様体となるので，定理 3 の双正則写像 L を QS_p に制限した $L|_{\mathrm{QS}_p}$ は実解析的である．一方，定理 2 より，$L|_{\mathrm{QS}_p}$ は全射であることがわかる．したがって，$L : \mathrm{QS}_p \cong T_p \to \mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ は実解析的な同相写像となる．これにより，T_p は実バナッハ空間としての構造をもち，それは元来の複素構造と実解析的に同値である．

L の逆写像については，Fefferman–Kenig–Pipher の擬等角拡張の方法を用いて，実部分空間 $\mathcal{B}_p(\mathbb{R}) \subset \widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{R})$ のある近傍では，ベルトラミ係数の空間への写像を具体的に構成できることが [22] では証明されている．

定理 4　$\mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ の $\widehat{\mathcal{B}}_p(\mathbb{R})$ におけるある近傍 U において，正則写像 $\Lambda : U \to M_p(\mathbb{U}) \times M_p(\mathbb{L})$ で $L \circ (\pi \times \pi) \circ \Lambda = \mathrm{id}|_U$ をみたすものが存在する．ここで，$\pi \times \pi : M_p(\mathbb{U}) \times M_p(\mathbb{L}) \to T_p(\mathbb{U}) \times T_p(\mathbb{U}) \cong \widehat{\mathcal{C}}_p$ は $(\mu_1, \mu_2) \mapsto G(\mu_1, \mu_2)|_{\mathbb{R}}$ で定まる写像である．

以下では，ヴェイユ・ピーターソン埋め込みの空間 $\widehat{\mathcal{C}}_p$ の構造についてさらに説明する．ヴェイユ・ピーターソン曲線のパラメーターとして，２つの標準的なものが考えられる．リーマン写像の境界値によるものと弧長によるものである．それぞれを使って $\widehat{\mathcal{C}}_p$ に２種類の積構造を与えることができるので，その関係について考察する．

p–ヴェイユ・ピーターソン曲線 Γ によって正の向きに囲まれた領域への $\mathbb{U}$ からの正規化されたリーマン写像を G とする．このような G は $\mathbb{C}$ の擬等角自己同相写像に拡張し，$G(0, \nu)$ $(\nu \in M_p(\mathbb{L}))$ と表すことができる．このとき $g = G(0, \nu)|_{\mathbb{R}}$ は Γ のパラメーターとなる p–ヴェイユ・ピーターソン埋め込みである．このような p–ヴェイユ・ピーターソン埋め込み全体を $\mathrm{RM}_p \subset \widehat{\mathcal{C}}_p$ とする．ベアス座標を用いると $\mathrm{RM}_p = \{[0]\} \times T_p(\mathbb{L})$ である．これは $\widehat{\mathcal{C}}_p$ の複素解析的部分多様体である．

任意の p–ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma \subset \mathbb{C}$ は Γ についてのリーマン写像パラメーター $g \in \mathrm{RM}_p$ のパラメーター変更として表せる．パラメーター変更 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は QS_p に属することがわかるので，γ はこのような成分への一意的な分解 $\gamma = g \circ f$ をもつ．写像 $\Phi : \widehat{\mathcal{C}}_p \to \mathrm{RM}_p$ を $\Phi(\gamma) = g$ により定義し，写像 $\Pi : \widehat{\mathcal{C}}_p \to \mathrm{QS}_p$ を $\Pi(\gamma) = f$ により定義する．

これらの写像をベアス座標で表せば，$\Phi([\mu_1], [\mu_2]) = ([0], [\mu_2] * [\bar{\mu}_1]^{-1})$，$\Pi([\mu_1], [\mu_2]) = ([\mu_1], [\bar{\mu}_1])$ となることがわかる．ここで $\bar{\mu}(z) = \overline{\mu(\bar{z})}$ は $\mathbb{R}$ に関して対称なベルトラミ係数を表す．$T_p \cong \mathrm{QS}_p$ が位相群であることより，Φ は連続である．一方，Π は実解析的な部分多様体 QS_p への射影であるので実解析的である．同相写像

$$(\Phi, \Pi) : \widehat{\mathcal{C}}_p \to \mathrm{RM}_p \times \mathrm{QS}_p$$

が $\widehat{\mathcal{C}}_p$ に積構造を与えている．

Γ に対してリーマン写像パラメーターのかわりに弧長パラメーターを考える．定理 3 より，弧長パラメーターによる p–ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $\gamma_0(x) = \int_0^x e^{iv(t)}dt$ は，L による $iv \in i\mathcal{B}_p(\mathbb{R}) \cap L(\widehat{\mathcal{C}}_p)$ の逆像で表される．最後の集合を Ω_p とおき，$\mathrm{IW}_p = L^{-1}(\Omega_p)$ とすると，これは $\widehat{\mathcal{C}}_p$ の実解析的な部分多様体であり，弧長パラメーターによる p–ヴェイユ・ピーターソン埋め込み全体の空間となる．

任意の p–ヴェイユ・ピーターソン埋め込み $\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma \subset \mathbb{C}$ は Γ についての弧長パラメーター $g_0 \in \mathrm{IW}_p$ のパラメーター変更 $f_0 \in \mathrm{QS}_p$ で表される．よって γ は一意的な分解 $\gamma = g_0 \circ f_0$ をもつ．写像 $\Phi_0 : \widehat{\mathcal{C}}_p \to \mathrm{IW}_p$ を $\Phi_0(\gamma) = g_0$ により定義し，写像 $\Pi_0 : \widehat{\mathcal{C}}_p \to \mathrm{QS}_p$ を $\Pi_0(\gamma) = f_0$ により定義する．これらの写像 Φ_0，Π_0 も連続であることがわかり，同相写像

$$(\Phi_0, \Pi_0) : \widehat{\mathcal{C}}_p \to \mathrm{IW}_p \times \mathrm{QS}_p$$

が $\widehat{\mathcal{C}}_p$ にもうひとつの積構造を与える．

第2の積構造によりヴェイユ・ピーターソン曲線族 $\mathcal{C}_p$ を IW_p と同一視すれば，写像 $\Phi|_{\mathrm{IW}_p}$ および $\Pi|_{\mathrm{IW}_p}$ は，曲線の変化に対するリーマン写像パラメーターとそのパラメーター変更の依存性を記述するものと解釈できる．$\Phi|_{\mathrm{IW}_p}$ については次の主張が [18] にある．これにより，$T_p \cong \mathrm{RM}_p$ には IW_p の実解析的構造を誘導することができるが，これは $T_p \cong \mathrm{QS}_p$ の実解析的構造とは同値でない．

命題 5　$\Phi|_{\mathrm{IW}_p} : \mathrm{IW}_p \to \mathrm{RM}_p$ は同相写像である．

一方，パラメータ変更写像に関する $\Pi|_{\mathrm{IW}_p}$ については，その実解析性が様々な設定で考察されている．ヴェイユ・ピーターソン曲線の場合の結果は [15] にある．次節では弦弧曲線の場合の結果を述べる．文献に合わせるために，双正則同相写像 L による共役をとって $\lambda = L \circ \Pi|_{\mathrm{IW}_p} \circ L^{-1} : \Omega_p \to \mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ を考えても同じである．Π は実解析的であり，IW_p は実解析的部分多様体であるので，λ の実解析性が従う．弦弧曲線の場合の結果を利用して，逆写像の実解析性まで込めた証明は [25] でされている．

定理 6　$\lambda : \Omega_p \to \mathcal{B}_p(\mathbb{R})$ は像の上への実解析的な同相写像であり，その逆写像も実解析的である．

4　BMO タイヒミュラー空間と弦弧曲線

この節では，絶対連続タイヒミュラー空間である Astala–Zinsmeister [1] により導入され BMO タイヒミュラー空間について述べる．しかし，タイヒミュラー空間論としての定式化については前節でみており，多くの部分が設定を変えた繰り返しとなるため，ここでは最低限の定義に留める．理論の基礎は Shen–Wei [17] でなされた．それに対し，弦弧曲線族はついてはなるべく自給的に議論する．

平面上の局所求長可能なジョルダン曲線が**弦弧曲線**であるとは，曲線上の任意の2点間の曲線に沿った「弧」の長さが2点を結ぶ線分「弦」の長さの一様な定数倍で押さえられることである．「弧」の長さを直径に置き換えれば擬円周の特徴付けとなるので，弦弧曲線は擬円周である．無限遠を通る擬円周 Γ は $\mathbb{C}$ の擬等角同相写像による $\mathbb{R}$ の像として特徴付けられた．このようなすべての擬円周全体のアファイン写像による同値類の集合は，普遍タイヒミュラー空間 T と同一視できた．同様に，弦弧曲線は $\mathbb{C}$ の双リプシッツ写像同相写像による $\mathbb{R}$ の像であり，対応する空間は BMO タイヒミュラー空間のある開集合になっている．

ベルトラミ係数 $\mu \in M(\mathbb{U})$ に対して測度 $\lambda_\mu = |\mu(z)|^2 dxdy/\mathrm{Im}z$ を考えたとき，これが $\mathbb{U}$ 上のカルレソン測度になるような μ 全体の空間を $\mathcal{M}(\mathbb{U})$ とする．ノルムは $\|\mu\|_\infty + \|\lambda_\mu\|_c^{1/2}$ を与える．ここで $\|\cdot\|_c$ はカルレソン測度のノルムである．**BMO タイヒミュラー空間** T_b は，$\mathcal{M}(\mathbb{U})$ のタイヒミュラー同値による商空間である．その位相は $\mathcal{M}(\mathbb{U})$ からのタイヒミュラー位相で定義し，複素構造はタイヒミュラー射影

$\pi : \mathcal{M}(\mathbb{U}) \to T_b$ が正則になるように定義される．

無限遠を通る擬円周 Γ を適切なパラメーターをもつ曲線と考える．すなわち，$\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma \subset \mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ の正規化された擬等角同相写像 $G(\mu_1, \mu_2)$ により誘導されているとみなす．そのような埋め込み $\gamma = G(\mu_1, \mu_2)|_{\mathbb{R}}$ はタイヒミュラー同値類の組 $([\mu_1], [\mu_2])$ により決定される．従って，その全体は普遍タイヒミュラー空間の直積 $T(\mathbb{U}) \times T(\mathbb{L})$ と同一視できる．この同時一意化の方法を弦弧曲線にも適用する．任意の $\mu_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{U})$, $\mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{L})$ に対する $\gamma = G(\mu_1, \mu_2)|_{\mathbb{R}}$ を **BMO 埋め込み**とよぶ．正規化された BMO 埋め込み全体の空間を $\widehat{\mathcal{C}}_{\mathrm{BMO}}$ とすると，同時一意化により BMO タイヒミュラー空間の直積 $T_b(\mathbb{U}) \times T_b(\mathbb{L})$ と同一視できる．

正規化された BMO 埋め込み $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ のうち，その像 Γ が弦弧曲線となるものの全体を $\widehat{\mathcal{C}}_A \subset \widehat{\mathcal{C}}_{\mathrm{BMO}}$ とする．任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{C}}_A$ は局所絶対連続であり，$\log \gamma'$ は $\mathbb{R}$ 上の複素数値 BMO 関数全体を定数関数の差を無視して定める複素バナッハ空間 $\widehat{\mathrm{BMO}}(\mathbb{R})$ に属する． このとき，次の定理は弦弧曲線をタイヒミュラー空間論的な観点で考察する上での基本的な主張となる．擬円周の場合と異なり，よりよい滑らかさをもつ弦弧曲線は，$\widehat{\mathcal{C}}_A$ を別の複素バナッハ空間 $\widehat{\mathrm{BMO}}(\mathbb{R})$ のなかで表現することができるが，この定理は，その複素構造がタイヒミュラー空間論から来るものと同値であることを主張している．

定理 7　$\widehat{\mathcal{C}}_A$ は $T_b(\mathbb{U}) \times T_b(\mathbb{L})$ の開集合であり，$\gamma \in \widehat{\mathcal{C}}_A$ に対して $L(\gamma) = \log \gamma'$ で定義される写像 $L : \widehat{\mathcal{C}}_A \to \widehat{\mathrm{BMO}}(\mathbb{R})$ は像の上への双正則同相写像である．

弦弧曲線は調和解析的な観点から研究されてきた平面曲線であるが，このような同時一意化によるタイヒミュラー空間論からの研究はこれまでされてこなかった．同じことがヴェイユ・ピーターソン曲線についても当てはまる．以下では，このような観点が弦弧曲線に関するいくつかの議論に簡潔な証明を与えて明快にすることができることをみていく．加えて，この分野で未解決であった問題へのアプローチもできることをみる．

擬対称同相写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，$\mathbb{U}$ の擬等角自己同相写像の境界への連続拡張であった．もしもこの f が局所絶対連続で，その微分 f' が Muckenhoupt の **A_∞-加重**のクラス（[11, 4] 参照）に属しているならば f は**強擬対称**であるという．正規化された強擬対称同相写像の全体は群を成し，それを SQS で表す．正規化された擬対称写像の成す群 QS が普遍タイヒミュラー空間 T と同一視できたのと同様に，SQS は BMO タイヒミュラー空間 T_b と同一視できる．SQS の位相や解析的な構造は T_b から誘導されたもので定義する．

一方，$\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ を実数値 BMO 関数からなる $\widehat{\mathrm{BMO}}(\mathbb{R})$ の実部分空間とし，そのなかの $u \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ で e^u が A_∞-加重となるもの全体からなる部分集合を $\mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ とする．これは $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ の凸開集合となる．このとき，任意の $f \in \mathrm{SQS}$ に対して，$\log f' \in \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ が定義よりわかるが，実際，この対応 $\Psi : \mathrm{SQS} \cong T_b \to \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ は全単射である．さらに Ψ は同相写像であることがわかっていた．

定理 7 を用いた定式化では，より簡潔な議論を Ψ に適用し，より強い主張を証明することができる．その原理は簡単で，$\widehat{\mathcal{C}}_A$ のなかで SQS は $T_b(\mathbb{U}) \times T_b(\mathbb{L})$ の対角線に対応する実解析的部分多様体となることから来る．写像 Ψ は L の SQS への制限にほかならないので，定理 7 より次の主張が従う．

系 8　$\Psi : \mathrm{SQS} \cong T_b \to \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ は実解析的同相写像であり，その逆写像 Ψ^{-1} も実解析的である．

この結果の重要性は，BMO ノルムに関する実解析的な依存性をタイヒミュラー空間の解析的な構造に関するものに転換できる点にある．これは調和解析的な観点を複素解析的なものに変えるということもできる．例えば，SQS の接空間は，ある時間依存する $\mathbb{R}$ 上のベクトル場に関する流れの微分方程式の解として表現されていて，解はベクトル場の BMO ノルムに依存する形で与えられる ([26] 参照)．一方で，タイヒミュラー空間論では，T_b の接空間はベルトラミ微分で複素解析的に表現されるので，この両者の対応をみるためには，T_b, SQS, $\mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ の接空間レベルでの対応関係が必要になってくる．系 8 はこのような問題を考える上で役に立つ．

次に，弦弧曲線のリーマン写像によるパラメーターの連続依存性の問題について考える．任意の弦弧曲線 Γ に対して，Γ に正の向きに囲まれる領域の上へも $\mathbb{U}$ からの正規化されたリーマン写像は，その $\mathbb{R}$ への拡張で Γ のパラメーター g を定義することができる．このような弦弧曲線のリーマン写像によるパラメーター g 全体からなる $\widehat{\mathcal{C}}_A$ の部分集合を RM° と書く．これは $\widehat{\mathcal{C}}_A$ の複素解析的な部分多様体である．

任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{C}}_A$ に対して，γ の像である弦弧曲線 Γ のリーマン写像パラメーターを対応させる写像を $\Phi : \widehat{\mathcal{C}}_A \to \mathrm{RM}^\circ$ とする．この写像に付随して，$\gamma \in \widehat{\mathcal{C}}_A$ から $\Phi(\gamma)$ への同じ弦弧曲線についてのパラメーター変更が考えられるが，これは SQS の元の合成で与えられる．この対応を $\Pi : \widehat{\mathcal{C}}_A \to \mathrm{SQS}$ とする．よって，任意の $\gamma \in \widehat{\mathcal{C}}_A$ は一意的な分解 $\gamma = \Phi(\gamma) \circ \Pi(\gamma)$ をもつ． この写像 Π は，$\widehat{\mathcal{C}}_A$ から実解析的な部分多様体 SQS の上への射影となっていることから，実解析的な写像である．

さらに，弦弧曲線は局所求長可能であることから，標準的なパラメーターとして弧長パラメーターをもつ．$\widehat{\mathcal{C}}_A$ の部分集合で弦弧曲線の弧長パラメーター全体からなるものを IA とする．これは定理 7 の写像 $L : \widehat{\mathcal{C}}_A \to \widehat{\mathrm{BMO}}(\mathbb{R})$ を用いれば，次のように表すことができる．純虚数値関数全体からなる $\widehat{\mathrm{BMO}}(\mathbb{R})$ の実部分空間を $i\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ とし，$\Omega = i\mathrm{BMO}(\mathbb{R}) \cap L(\widehat{\mathcal{C}}_A)$ とする．このとき，$\mathrm{IA} = L^{-1}(\Omega)$ となる．とくに，IA は $\widehat{\mathcal{C}}_A$ の実解析的な部分多様体である．

考える問題は，上で定義した写像 Π の IA への制限に関するものである．双正則写像 L による対応 $\mathrm{IA} \cong \Omega \subset i\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ と $\mathrm{SQS} \cong \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R}) \subset \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ により，$\Pi|_{\mathrm{IA}}$ の L による共役として $\lambda : \Omega \to \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ を定義する．この写像 λ は調和解析的な立場からよく研究されてきた対象で（[12, 27] 参照），とくに Coifman–Meyer [5] は λ の実解析性

を証明している．しかし，我々の定式化では，写像 $\Pi|_{\mathrm{IA}}$ は単に実解析的な写像の実解析的な部分多様体への制限にすぎないので，当然に実解析的となる．L は双正則であるので，その共役である λ についてもそうである．

系 9　$\lambda = L \circ \Pi|_{\mathrm{IA}} \circ L^{-1} : \Omega \to \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ は実解析的である．

Φ についても同様に $\Phi|_{\mathrm{IA}}$ を考える．この写像は，リーマン写像パラメーターが弦弧曲線 Γ を動かしたとき，どのように変化するかを表しているが，それが不連続になることをが証明できる．文献での問題設定に従うために，$\Pi^* : \widehat{\mathcal{C}}_A \to \mathrm{SQS}$ を Π と対を成す射影とする．すなわち，$\gamma \in \widehat{\mathcal{C}}_A$ に対して $(\Pi(\gamma), \Pi^*(\gamma))$ が $\mathrm{SQS} \times \mathrm{SQS} \cong T_b(\mathbb{U}) \times T_b(\mathbb{L})$ の元として γ を復元するものとする．とくに Π^* は RM° を T_b との同一視を通して SQS に埋め込むので，等角貼り合わせに付随する写像と考えることができる．このとき，$\rho : \Omega \to \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ を L による $\Pi^* \circ \Phi|_{\mathrm{IA}}$ の共役として定義する．Katznelson–Nag–Sullivan [8] は ρ が連続であるかどうかを問題として挙げている．ヴェイユ・ピーターソン曲線に関する同様の設定で定義する ρ の連続性は命題 5 による．

定理 10　$\Phi|_{\mathrm{IA}} : \mathrm{IA} \to \mathrm{RM}^\circ$ と $\rho = L \circ (\Pi^* \circ \Phi|_{\mathrm{IA}}) \circ L^{-1} : \Omega \to \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ は連続ではない．

この結果の証明には，さらに $T_b \cong \mathrm{SQS}$ が位相群とはならないという性質をうまく適用する必要がある．単純に，位相群とはならないことからは Φ が $\widehat{\mathcal{C}}_A$ 上で連続ではないことが従う．しかし，$\Phi|_{\mathrm{IA}}$ の不連続性はより強い結果であり，それは $\lambda : \Omega \to \mathrm{BMO}^*(\mathbb{R})$ の原点の近傍での局所的な様子を観察することから導かれる．λ の原点での微分が $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ 上のヒルベルト変換で与えられるという性質を用いて，λ が原点において局所同相写像であることが示されている（[12, 13] 参照）．これにより IA の元の選択に必要な程度の自由度を与えることができ，$\Phi|_{\mathrm{IA}}$ の不連続性を示す具体的な元の列を構成することを可能にする．

参考文献

[1] K. Astala and M. Zinsmeister, *Teichmüller spaces and BMOA*, Math. Ann. **289** (1991), 613–625.

[2] A. Beurling and L. V. Ahlfors, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math. **96** (1956), 125–142.

[3] C. J. Bishop, *Function theoretic characterizations of Weil–Petersson curves*, Rev. Mat. Iberoam. **38** (2022) 2355–2384.

[4] R. R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250.

[5] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Lavrentiev's curves and conformal mappings*, Institute Mittag–Leffler, Report No.5, 1983.

[6] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[7] R. A. Fefferman, C. E. Kenig and J. Pipher, *The theory of weights and the Dirichlet problems for elliptic equations*, Ann. of Math. **134** (1991), 65–124.

[8] Y. Katznelson, S. Nag, and D. P. Sullivan, *On conformal welding homeomorphisms associated to Jordan curves*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. Math. **15** (1990), 293–306.

[9] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Graduate Texts in Math. 109, Springer, 1987.

[10] K. Matsuzaki, *Teichmüller space of circle diffeomorphisms with Hölder continuous derivatives*, Rev. Mat. Iberoam. **36** (2020), 1333–1374.

[11] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[12] S. Semmes, *The Cauchy integral, chord-arc curves, and quasiconformal mappings*, The Bieberbach conjecture (West Lafayette, Ind., 1985), pp.167–183, Math. Surveys Monogr. 21, Amer. Math. Soc., 1986.

[13] S. Semmes, *Quasiconformal mappings and chord-arc curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 233–263.

[14] Y. Shen, *Weil–Petersson Teichmüller space*, Amer. J. Math. **140** (2018), 1041–1074.

[15] Y. Shen and S. Tang, *Weil–Petersson Teichmüller space II: smoothness of flow curves of $H^{\frac{3}{2}}$-vector fields*, Adv. Math. **359** (2020), 106891.

[16] Y. Shen, S. Tang and L. Wu, *Weil–Petersson and little Teichmüller spaces on the real line*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **43** (2018), 935–943.

[17] Y. Shen and H. Wei, *Universal Teichmüller space and BMO*, Adv. Math. **234** (2013) 129–148.

[18] Y. Shen and L. Wu, *Weil–Petersson Teichmüller space III: dependence of Riemann mapping for Weil–Petersson curves*, Math. Ann. **381** (2021), 875–904.

[19] L. Takhtajan and L.P. Teo, *Weil–Petersson metric on the universal Teichmüller space*, Mem. Amer. Math. Soc. **183**(861) (2006).

[20] S. Tang and Y. Shen, *Integrable Teichmüller space*, J. Math. Anal. Appl. **465** (2018), 658–672.

[21] Y. Wang, *Equivalent descriptions of the Loewner energy*, Invent. Math. **218** (2019), 573–621.

[22] H. Wei and K. Matsuzaki, *The p-Weil–Petersson Teichmüller space and the quasiconformal extension of curves*, J. Geom. Anal. **32** (2022), 213.

[23] H. Wei and K. Matsuzaki, *BMO embeddings, chord-arc curves, and Riemann mapping parametrization*, Adv. Math. **417** (2023) 108933.

[24] H. Wei and K. Matsuzaki, *The p-integrable Teichmüller space for $p \geqslant 1$*, arXiv:2210.04720.

[25] H. Wei and K. Matsuzaki, *Parametrization of p-Weil–Petersson curves: holomorphic dependence*, arXiv:2111.14011.

[26] H. Wei and Y. Shen, *On the tangent space to the BMO-Teichmüller space*, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), 715–726.

[27] S. Wu, *Analytic dependence of Riemann mappings for bounded domains and minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **156** (1993), 1303–1326.

[28] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Math. Surveys Monogr. 138, Amer. Math. Soc., 2007.