

クライン群の力学系

—極限集合のハウスドルフ次元—

松 崎 克 彦

1 序

クライン群とは複素平面の一次分数変換を元とする離散群のことである。そのうちフックス群と呼ばれるものは、常微分方程式の解のモノドロミーや、さらに古くはモジュラー函数の保型形式との関連等で 19 世紀の数学の中に見え隠れしていた。19 世紀の末、Fricke-Klein ([Mg] 参照) は一次分数変換の離散群一般に関する研究を創始し、今日知られるクライン群論の原始的な部分、たとえば極限集合(軌跡の集積点集合)の性質を調べ、フラクタルという言葉がない時代にその集合の複雑さを表現した。また Poincaré [Po] はフックス群の概念の 3 次元への拡張を考え、クライン群を 3 次元双曲空間の合同変換の離散部分群としてとらえていた(しかしその後半世紀以上の間、この視点からの大きな進展はなかった)。

Fricke-Klein から続くクライン群論の 2 次元的な古典論は、20 世紀の前半を緩やかに進んでいく。同時に 1920 年ごろから有理函数の複素力学系の理論が Fatou や Julia により始まり、クライン群論との類似点もいくつか浮かびあがってきた。こうしてこの複素力学系の兄弟はやがて時が熟すまで、静かにさなぎの時代を過ごすことになる。クライン群論の第一の脱皮は 60 年以降の擬等角写像の理論の完成によってもたらされた。これにより、いままでの力学系の相空間の解析に、相に変形を与えるという武器が加わり、さらにパラメーター空間の解析、すなわちタイヒミュラー空間論のひとつの分野へと大きく発展した。Ahlfors と Bers はクライン群論の複素解析的理論の基礎を確立した。

しかしクライン群の真の姿は 3 次元双曲空間の合同変換群として初めて明らかになる。3 次元トポロジーの基礎の完成にともない、70 年代よりこの Poincaré の視点の戻る動きは Marden や Maskit を中心にして現れてきたが、70 年後半の Thurston [Th] による 3 次元双曲多様体の理論はクライン群論に革命的転機を与え、現在まで続く大きな流れを形成した。この流れは同時に数学のいくつかの分野を巻き込み、クライン群論の裾野をひろげていった。

このような現代理論のなかでクライン群論のもうひとつの頂点と思えるのは、Sullivan による古典解析のルネサンスと複素力学系統一理論である。彼は力学系的手法により Hopf-Tsuji のエルゴード性定理、Mostow の剛性定理、Ahlfors の有限性定理を拡張し [S2]、さらには擬等角写像を有理函数の理論にとり入れクライン群論との統一的解釈をめざした。また Patterson が構成した極限集合上の測度を用いて、いままで極限集合のフラクタルとしての複雑さを測る素朴な指標だったハウスドルフ次元というものが、いかによく双曲多様体の幾何学的性質を反映させているかを明らかにした [S1]。

本稿はクライン群の複素力学系的理論の中から、この極限集合のハウスドルフ次元の話題に焦点をしばって最近の発展を解説したものである。Sullivan の理論は 80 年代に現れたものであり、その解説はすでに多数なされている(代表的なものとして Nicholls [N] によるものがある。本稿にあ

る命題のいくつかについては、特に文中で言及していなくてもここに詳しい説明がある)が、最近のいくつかの論文(特に Bishop-Jones [BJ])の結果は、それをより簡明かつ完全なものにすることに成功している。また、クライン群の変形にともなう極限集合のハウスドルフ次元の変化という力学系理論の典型的な問題に関しても、満足できる解答が得られた (McMullen [Mc])。本稿では、これらの事項も含めて主要な結果の再編成をし、それを(筆者にとって)最も簡明と思える手順で解説することを目指した。クライン群論の基本的事実や用語等は必要な範囲で述べているが、割愛してあるものは文献 [MT] を参照すると調べられると思う。

2 クライン群の極限集合

リーマン球面 $\hat{C}$ の等角自己同相写像は一次分数変換(向きを保つメビウス変換)であり、これら全体のなす群はリー群として $PSL_2(C) = SL_2(C)/\pm I$ と同一視される。この離散部分群をクライン群という。以下簡単のためクライン群は単位元以外に位数有限の元をもたないと仮定する。メビウス変換はもともと複素平面の円または直線に関する反転の合成として定義されるので、この作用は自然に上半空間 $H^3 = \{(x, y, t) | t > 0\}$ に拡張する(ポアンカレ拡張)。しかも H^3 に双曲計量 $d\rho^2 = (dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$ をいれて 3 次元双曲空間の上半空間モデルとすると、メビウス変換は (H^3, ρ) の合同変換となる。またケーリー変換により上半空間を単位球にうつせば、双曲空間の単位球モデル (B^3, ρ) を得る。 B^3 の境界 S^2 が双曲空間の無限遠に位置する球面である。

クライン群 Γ は双曲空間の向きを保つ合同変換群として自由かつ真性不連続に作用するので、商空間 $N_\Gamma = B^3/\Gamma$ は双曲多様体となる。また S^2 上にも Γ の作用が真性不連続となる最大の開集合 $\Omega(\Gamma)$ (不連続領域と呼ぶ)を考えると、商空間 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ は複素多様体(リーマン面)となる。境界付き多様体 $(B^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ は内部に双曲構造、境界に複素構造をもつものとみなし、これをクライン多様体と呼ぶ。

不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ の S^2 での補集合を極限集合と呼び、 $\Lambda(\Gamma)$ で表す。これは次の定義と同値である。

定義(極限集合) 原点 $0 \in B^3$ のクライン群 Γ による軌跡 $\Gamma(0)$ のユークリッド位相に関する集積点集合($\subset S^2$)を Γ の極限集合と定義し、 $\Lambda(\Gamma)$ で表す。

極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ は 3 点以上を含むときは非可算無限個の点からなる完全集合である。 $\Lambda(\Gamma)$ が 2 点以下のとき Γ を初等的という。以下本稿ではクライン群はすべて非初等的と仮定する。極限集合は Γ -不変な空でない最小の閉集合としても特徴づけられる。 $\Lambda(\Gamma)$ に端点をもつような測地線全体の合併集合の凸包をとり、それを Γ の作用で割った N_Γ の部分集合を凸核と呼び、 C_Γ で表す。 C_Γ は N_Γ への包含写像がホモトピー同値写像となるような最小の凸部分多様体である。

N_Γ の体積が有限であるという性質の拡張で、極限集合上においてはそれと同等の性質を保証するものとして次がある。

定義(幾何学的有限) クライン群 Γ および双曲多様体 N_Γ が幾何学的有限とは、 Γ が有限生成かつ凸核 C_Γ の体積が有限であることである。

幾何学的有限なクライン群 Γ に対しては、

$$\Lambda(\Gamma) = \Lambda_c(\Gamma) \cup \Lambda_p(\Gamma)$$

という分解が成り立つ。ここで $\Lambda_c(\Gamma)$ は非接的極限集合(conical limit set)であり、 $x \in S^2$ が

$\Lambda_c(\Gamma)$ に属するのは、 x に向かうある測地線から有限距離の範囲内で $\Gamma(0)$ が x に集積するときとする。また $\Lambda_p(\Gamma)$ は Γ の放物型元の固定点の集合で高々可算集合である(より詳しくいえば、 $\Lambda_p(\Gamma)$ の点はすべて有界放物型固定点になっている)。

定義(ハウスドルフ測度, 次元) S^2 上の集合 E に対して, 球面距離に関する半径 r_i が $\delta > 0$ 以下の円板 $\Delta(x_i, r_i)$ 可算個による被覆 $E \subset \bigcup \Delta(x_i, r_i)$ を考える。実数 $s \geq 0$ に対して $\mathcal{H}_s^\delta(E) = \inf \sum r_i^s$ と定義する。ただし下限は E の上記のような被覆すべてにわたるものとする。さらに $\delta \rightarrow 0$ としたときの極限

$$\mathcal{H}_s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_s^\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_s^\delta(E)$$

を考える。 $\mathcal{H}_s$ は S^2 上の外測度になり, それを $\mathcal{H}_s$ 可測集合に制限したものを s 次元ハウスドルフ測度という。特にボレル集合は $\mathcal{H}_s$ 可測集合である。

任意の集合 $E \subset S^2$ に対して, $s < t$ ならば $\mathcal{H}_s^\delta(E) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_t^\delta(E)$ であるので, $0 \leq s < d$ ならば $\mathcal{H}_s(E) = \infty$, $d < s < \infty$ ならば $\mathcal{H}_s(E) = 0$ を満たす値 d が一意的に存在する。これを E のハウスドルフ次元といい, $\dim E$ で表す。

ハウスドルフ測度については, [Fa], [Fe], [Ro]に詳しい解説がある。

幾何学的有限なクライン群 Γ について, 2次元ハウスドルフ測度(2次元ルベグ測度と定数倍をのぞいて一致する)は $\Lambda(\Gamma) \neq S^2$ ならば $\mathcal{H}_2(\Lambda(\Gamma)) = 0$ であることが Ahlfors により証明された(系 14 参照)。これが一般の有限生成クライン群でも成立すると主張するものが Ahlfors 予想であり, いまだ完全には解決されていない。これは任意の N_Γ が位相的に素直, すなわち「 N_Γ がある境界付きコンパクト多様体の内部に同相である」という予想(Marden 予想)から従うことが知られている[C2]。

3 収束指数

クライン群に関するもうひとつの古典的な指数として次を定義する。

定義(収束指数) クライン群 Γ に対して

$$\delta(\Gamma) = \inf \{s \geq 0 \mid g_s := \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s\rho(0, \gamma(0))) < \infty\}$$

を Γ の収束指数という。ただし ρ は双曲距離である。 g_s を s 次元ポアンカレ級数と呼ぶ。 $\delta(\Gamma)$ 次元ポアンカレ級数が発散するとき Γ を発散型, 収束するとき収束型という。

単位球モデル B^3 で考えれば $\exp(-\rho(0, \gamma(0)))$ は $1 - |\gamma(0)|$ と比較可能であるので, 収束指数は $\sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - |\gamma(0)|)^s$ の収束発散で定義することもできる。また $x \in S^2$ に対して

$$|\gamma'(x)| = \frac{1 + |\gamma(0)|}{|x - \gamma^{-1}(0)|^2} (1 - |\gamma(0)|)$$

より, $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(x)|^s$ ($x \in \Omega(\Gamma)$)の収束発散で定義することもできる ($|\gamma'(x)|$ は常に $\mathbf{R}^3$ の等角写像の x での伸縮率の意味で用いる)。さらに原点から半径 r 以内にある軌跡 $\Gamma(0)$ の数を $n(r)$ とすると,

$$\delta(\Gamma) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{r}$$

となることがわかる。これより特に $\delta(\Gamma) \leq 2$ が成り立つ。また $\delta(\Gamma) > 0$ もいろいろな方法で確か

められる。

収束指数とハウスドルフ次元の関係については、次の Bishop-Jones [BJ] による結果が最終的である。

定理 1 任意のクライン群 Γ に対して $\dim \Lambda_c(\Gamma) = \delta(\Gamma)$ が成り立つ。

まず、容易な上からの評価 $\dim \Lambda_c(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$ を示す。 $\gamma \in \Gamma$ に対して、 $\gamma(0)$ 中心で双曲半径 $t > 0$ の球が、原点 0 からみて S^2 上につくる「影」を $b(\gamma, t)$ で表す。 Γ の元に $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ のように番号をふると、非接的極限集合は

$$\Lambda_c(\Gamma) = \bigcup_{t>0} \Lambda_c^t(\Gamma), \quad \Lambda_c^t(\Gamma) := \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n > N} b(\gamma_n, t)$$

と書ける。

命題 2 s 次元ポアンカレ級数が収束するならば、 $\Lambda_c(\Gamma)$ の s 次元ハウスドルフ測度は零である。

(証明) t を固定するごとに $\Lambda_c^t(\Gamma)$ の s 次元ハウスドルフ測度が零であることを示せばよい。これは影 $b(\gamma_n, t)$ の半径が $1 - |\gamma_n(0)|$ と比較可能であることからわかる。 ■

定理 1 の結果はフックス群一般および幾何学的有限なクライン群に対しては以前から知られていた [S1], [S4]。クライン群一般に対してこれを証明したのが Bishop-Jones の成果である。以下では、McMullen による擬測地線を用いた原証明の解釈を紹介する。ここで双曲空間内の区分的測地線が (L, θ) -擬測地線であるとは、各測地線分の長さは $L > 0$ 以上で、かつ各頂点で 2 つの測地線分のなす角が $\theta > 0$ 以上であることをいう。

(証明) $\dim \Lambda_c(\Gamma) \geq \delta(\Gamma)$ を示せばよい。任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $s' = \delta(\Gamma) - \epsilon$ 次元ポアンカレ級数は発散するが、このとき $\Lambda_c(\Gamma)$ の $s = \delta(\Gamma) - 2\epsilon$ 次元ハウスドルフ測度は零ではないことを証明する。

B^3 内に次のような原点を根とする樹木 (tree) T を構成する： T の頂点は原点の軌跡 $\Gamma(0)$ の部分集合の点からなり、かつ T の辺は長さ $L > 0$ 以上の測地線分で、各頂点で測地線分のなす角は $\theta > 0$ 以上である。このとき擬測地線の性質より、 T の任意の頂点とその子孫の点を結ぶ区分的測地線は、その両端を結ぶ測地線から L と θ のみによる一定距離以内にある。したがって、 T のエンドの集合 $E(T) \subset S^2$ は $\Lambda_c(\Gamma)$ に含まれることがわかる。さらに T が次を満たすことを要請する：各頂点 v の直接の子にあたるすべての頂点 v' にわたってとった和が

$$\sum_{v'} \exp(-s\rho(v', 0)) \geq \exp(-s\rho(v, 0)) \quad \cdots (*)$$

を満たし、かつ各辺 e の長さは有界 ($\leq L$) である。

このような T の存在をまず仮定して $\mathcal{H}_s(E(T)) > 0$ を証明する。 $E(T)$ の円板による被覆 $\bigcup \Delta(x_i, r_i)$ をとる。原点からエンドに向かう T 内の各道に対し、もしその道が $\Delta(x_i, r_i)$ に含まれるエンドで終わるならば、 $\Delta(x_i, 2r_i)$ が B^3 内に張る半球 B_i にはじめて入った頂点までを残し、そこから先を切る。こうして有限樹木 T' をつくと、 T' の境界にある頂点 v' すべてにわたってとった和は、(*) より

$$\sum \exp(-s\rho(v', 0)) \geq \exp(-s\rho(0, 0)) = 1$$

を満たしている。 $\exp(-s\rho(v', 0))$ と $(1 - |v'|)^s$ は比較可能なので、ある定数 $C > 0$ が存在して、 $v' \in B_i$ ならば $C(2r_i)^s \geq \exp(-s\rho(v', 0))$ となる。ひとつの B_i に入る $v' \in \partial T'$ の数は $a = \inf_{\gamma \in \Gamma - \{id\}} \rho(\gamma(0), 0)$ と L' のみによる定数 K 以下なので、

$$2^s CK \sum_i r_i^s \geq \sum_{v' \in \partial T'} \exp(-s\rho(v', 0)) \geq 1$$

がわかる。これは、 $E(T)$ の円板による任意の被覆に対して、その半径の s 乗の和が $(2^s CK)^{-1}$ 以上であることを意味するので主張を得る。

次に上の要請を満たす樹木 T の構成法を述べる。 S^2 上の円板 Δ_1 と原点 0 を結んでできる円錐を A_1 とする。 A_1 内に含まれる $\Gamma(0)$ の点に制限してとった s' 次元ポアンカレ級数 $g_{s'}$ の部分和が発散するように Δ_1 をとることができる。さらに Γ は非初等的なので、 Δ_1 と交わらない円板 Δ_2 で、対応する円錐 A_2 でとった $g_{s'}$ の部分和がやはり発散するようなものが存在する。 A_1 内の原点から出る線分と A_2 のそれのなす角度の最小値の半分以上を θ とする。さらに、ある固定した $l > 0$ に対して、 B^3 の任意の 2 点を結ぶ 2 本の (L, θ) -擬測地線は、互いに距離 l 以上離れることはないように $L > 0$ を選んでおく。

A_i ($i=1, 2$) を原点からの双曲距離が $[0, 1), [1, 2), \dots, [n, n+1), \dots$ の範囲のブロック $\{A_{i,n}\}_{n=0,1,\dots}$ に分け、それぞれのブロックに含まれる $\Gamma(0)$ の点に制限してポアンカレ級数の部分和を考える。 $g_{s'}$ は発散しているので、任意の $M > 0$ に対して無限個のブロック $\{A_{i,n(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ が存在して、そこでの $g_{s'}$ の部分和は M 以上となる。 a と l のみによるある自然数 b が存在して、ひとつのブロックにはいる $\Gamma(0)$ の点を b 組に分ければ、原点から出る 2 本の (L, θ) -擬測地線が同じ組に属する異なる点を通るとすると、それらは必ず l 以上離れているようにできる。 M を b より十分大きくとり、 $n(k) \geq L$ となるブロック $A_{i,n(k)}$ をひとつ選ぶ。 b 組のうち少なくともひとつは $g_{s'}$ の部分和が $M/b \gg 1$ であるので、その組に属する点を樹木 T の第 1 世代の頂点 $\{v\}$ とし、原点と各 v を結ぶ測地線を辺 e とする。

v に続く第 2 世代の頂点 $\{v'\}$ の選び方は、まず v を新たに原点とみなし、 v を頂点とする錐 A_1, A_2 のどちらか一方で e に対する角度が θ 以上開いているものをとる(仮に A_1 とする)。 A_1 のブロックの点を上と同一に選びそれを $\{v'\}$ とし、 v と各 v' を結ぶ測地線を辺 e' とする。以下この操作をくり返せば、原点から枝別れしながら無限にのびる (L, θ) -擬測地線ができるが、これが樹木になっているのは、構成法より一度枝別れした (L, θ) -擬測地線は再び出会うことがないからである。頂点 v とその直接の子たち $\{v'\}$ について、擬測地線の性質より $\rho(v', 0) \approx \rho(v', v) + \rho(v, 0)$ であるので、

$$\sum_{v'} \exp(-s\rho(v', 0)) \approx \sum_{v'} \exp(-s\rho(v', v)) \cdot \exp(-s\rho(v, 0))$$

となるが、 $\sum_{v'} \exp(-s\rho(v', v)) \gg 1$ であるので(*)が満たされる。 ■

4 極限集合上の測度

極限集合上に群の作用で(以下の定義の意味において)不変な測度を考える。ハウスドルフ測度はメビウス変換に対して不変性をもっている。クライン群の軌跡の分布から極限集合上に台をもつ不変確率測度が標準的に構成でき、これを仲立ちにして、極限集合上のハウスドルフ測度およびハウスドルフ次元の評価をすることができる。

定義(不変測度) クライン群 Γ に対して、 S^2 上のボレル測度 μ が s 次元 Γ -不変測度であるとは、 S^2 上の任意のボレル可測集合 E と $\gamma \in \Gamma$ に対して、

$$\mu(\gamma E) = \int_E |\gamma'|^s d\mu$$

が満たされるときをいう。

Γ -不変確率測度が存在するような次元の範囲を考える。そのような次元の下限(測度の弱収束極限をとることにより実は最小値)を $\alpha(\Gamma)$ と書き、**臨界次元**と呼ぶ。Patterson[Pt1]と Sullivan[S1]は次のようにして $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度を構成した：

まず $s > \delta(\Gamma)$ に対して、収束するポアンカレ級数 g_s の各項を重みとしてディラック測度の和 $\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s\rho(0, \gamma(0))) \delta_{\gamma(0)}$ を考え、全測度で割って B^3 上の確率測度をつくる。そして $s \downarrow \delta(\Gamma)$ のときの弱収束極限をとる(正確には、 Γ が発散型のときはこれでいいが、収束型のときは B^3 の内部に測度の台が残らないように与える重みを調整する必要がある)。このようにして構成された確率測度は、極限集合上に台をもち、 $\delta(\Gamma)$ 次元の Γ -不変性をもつことが示される。

補題 3 任意のクライン群 Γ に対して、収束指数 $\delta(\Gamma)$ 次元の Γ -不変確率測度が存在する。したがって $\alpha(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$ が成り立つ。

次に s 次元 Γ -不変確率測度 μ_s とハウスドルフ測度の関係を調べる。そのときに本質的なのが Sullivan[S1]による**影の補題**である。これは軌跡の影 $b(\gamma, t)$ (3節で定義)を μ_s で測った大きさが、影の半径 $r(b(\gamma, t))$ の s 乗と比較可能であることを主張するものである。証明は[Pt3]を参照するのがよい。

補題 4 μ_s を任意の s 次元 Γ -不変確率測度とする。十分大きな t に対して、次を満たす $A > 0$ が存在する：有限個の $\gamma \in \Gamma$ を除き、

$$\frac{1}{A} \mu_s(b(\gamma, t)) < r(b(\gamma, t))^s < A \mu_s(b(\gamma, t))$$

が成り立つ。

この補題を直接命題 2 の証明に適用して、結論を Γ -不変確率測度に関するものに読み替えれば次がわかる。

命題 5 s 次元ポアンカレ級数が収束するならば、 s 次元 Γ -不変測度 μ_s に対して $\Lambda_c(\Gamma)$ は零集合である。

s 次元ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}_s$ の非接的極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ への制限を h_s で表す。これは s 次元 Γ -不変測度になっている(全測度が零または無限大の場合もありうる)。 h_s を μ_s を使って上から押さえるには、補題 4 に加えて、 $\Lambda_c(\Gamma)$ の影による被覆を、影どうしの交わりがない(あるいは交わりが一様に少ない)ものにできればよい。これは一般に**被覆定理**と呼ばれるもので、たとえば Vitali の被覆定理([Fa]参照)などが適用可能である。

補題 6 s 次元 Γ -不変確率測度 μ_s が存在すれば、ある定数 $C < \infty$ が存在して $h_s \leq C \mu_s$ となる。よって $\dim \Lambda_c(\Gamma) \leq s$ がわかり、 $\dim \Lambda_c(\Gamma) \leq \alpha(\Gamma)$ が成り立つ。

補題 3 と補題 6 より、上の 3 つの値は $\dim \Lambda_c$ 、 α 、 δ の順に大きさが並ぶが、ここで定理 1 を用いるとそれらはすべて等しいことがわかる。

定理 7 任意のクライン群 Γ に対して

$$\dim \Lambda_c(\Gamma) = \alpha(\Gamma) = \delta(\Gamma)$$

が成り立つ。

より精密に、収束指数次元 $\delta = \delta(\Gamma)$ でのポアンカレ級数の収束発散と非接的極限集合の測度に関して次の条件を考える。

- (1) δ 次元ポアンカレ級数 g_δ が収束する。
- (2) ある/任意の δ 次元 Γ -不変確率測度 μ_δ について $\mu_\delta(\Lambda_c(\Gamma)) = 0$ 。
- (3) δ 次元ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}_\delta$ について $\mathcal{H}_\delta(\Lambda_c(\Gamma)) = 0$ 。

(1) $\Rightarrow$ (2) は命題 5 で示されているが、実は逆の (2) $\Rightarrow$ (1) も成立する。このためには、双曲多様体 N_Γ の単位接束 $T_1 N_\Gamma$ 上に双曲計量の体積要素と Γ -不変確率測度 μ の直積から測度 m を定め、測地線流 $g(v, t) : T_1 N_\Gamma \times \mathbf{R} \rightarrow T_1 N_\Gamma$ が測度 m に関して保存的 (conservative) であるという条件を考える。すなわち、 m に関するほとんどすべての点 $v \in T_1 N_\Gamma$ に対して、 $g(v, t_n)$ が $T_1 N_\Gamma$ のあるコンパクト集合に入るような無限点列 $t_n \rightarrow \infty$ が存在するという条件である。これは明らかに $\mu(\Lambda_c(\Gamma)) = 1$ と同値である。Sullivan[S2] は μ が n 次元測度の場合に、ポアンカレ級数 g_n が発散するならば測地線流が保存性をもつことを示したが、これは一般の Γ -不変確率測度 μ の場合にも拡張できる[S3], [N]。なお Thurston は n 次元測度の場合に、測地線流を用いずに、 g_n が発散するならば $\Lambda_c(\Gamma)$ が全測度をもつことの初等的な証明を与えたが([Ah], [N] 参照), Tukia[Tu2] はこの証明法を一般の場合にも拡張している。

定理 8 Γ が発散型ならば、 $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度は $\Lambda_c(\Gamma)$ 上で正の測度をもつ。

さらに発散型クライン群に対しては、 $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度は一意的であることを述べる。一意性は群作用のエルゴード性と同値である。

命題 9 s 次元 Γ -不変確率測度 μ_s が存在すれば一意であるための必要十分条件は、 μ_s が次のエルゴード条件を満たすことである： S^2 の任意の Γ -不変可測集合 A に対して、 $\mu_s(A) = 0$ または $\mu_s(S^2 - A) = 0$ が成り立つ。

一般に、次の補題が示すように、非接的極限集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ 上では、任意の Γ -不変確率測度 μ はエルゴード条件を満たす。よって $\Lambda_c(\Gamma)$ 上正の測度をもつような μ は、存在すればその次元は $\delta(\Gamma)$ であり、しかも一意的である。

補題 10 Γ -不変確率測度 μ が $\Lambda_c(\Gamma)$ の Γ -不変部分可測集合 A に対して $\mu(A) > 0$ となるならば $\mu(A) = 1$ である。

(証明) A の密度点 x をとり、非接的に収束する軌跡 $\gamma_n(0) \rightarrow x$ を選ぶ。必要ならば部分列をとり、ある $y \in S^2$ に対して $\gamma_n^{-1}(0) \rightarrow y$ となるようにできる。 x は密度点なので、影の列 $b(\gamma_n, t)$ を考えれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(b(\gamma_n, t) - A)}{\mu(b(\gamma_n, t))} \rightarrow 0$$

となる。この影を γ_n^{-1} でうつしてもそこに含まれる A の割合はあまりかわらない。 $|(\gamma_n^{-1})'|$ を評価すると、 t のみによる定数 C が存在して、

$$\frac{\mu(\gamma_n^{-1}b(\gamma_n, t) - A)}{\mu(\gamma_n^{-1}b(\gamma_n, t))} = \frac{\int_{b(\gamma_n, t) - A} |(\gamma_n^{-1})'| d\mu}{\int_{b(\gamma_n, t)} |(\gamma_n^{-1})'| d\mu} \leq C \frac{\mu(b(\gamma_n, t) - A)}{\mu(b(\gamma_n, t))} \rightarrow 0$$

であることがわかる。 $\mu(\{y\}) = \lambda$ とおくと、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある t が存在して、十分大きいすべての n で $\mu(\gamma_n^{-1}b(\gamma_n, t)) > 1 - \lambda - \epsilon$ とできる。よって

$$\frac{\mu(A \cap \gamma_n^{-1}b(\gamma_n, t))}{\mu(\gamma_n^{-1}b(\gamma_n, t))} < \frac{\mu(A) - \lambda}{1 - \lambda - \epsilon}$$

であるが、左辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 1 に収束するので $1 - \lambda - \epsilon \leq \mu(A) - \lambda$ がわかり、 ϵ は任意なので $\mu(A) = 1$ となる。 ■

定義 (Patterson-Sullivan 測度) 発散型クライン群 Γ に対して、一意的に存在する $\delta(\Gamma)$ 次元の Γ -不変確率測度を Patterson-Sullivan 測度と定義する。以下簡単に PS 測度と呼ぶ。PS 測度は非接極限集合上に全測度をもつ。

次に (3) $\Rightarrow$ (2) について考える。なお、逆が成り立つことは補題 6 よりわかるし、あるいは (1) と (2) が同値であることを用いれば命題 2 より従う。ハウスドルフ測度の定義において、与えられた集合 E の被覆はあらゆる円板にわたって考えたが、それを半径 t の球の影の族 $\mathcal{F}_t = \{b(\gamma, t)\}_{\gamma \in \Gamma}$ に制限したものを考え、同様の方法で新しいハウスドルフ測度 $\mathcal{H}_s(\cdot; \mathcal{F}_t)$ を定義する。このとき影の補題と被覆定理を使えば、 s 次元 Γ -不変確率測度 μ_s と $\mathcal{H}_s(\cdot; \mathcal{F}_t)$ について、 $\Lambda_c^s(\Gamma)$ は同時に零集合になることがわかる。よって問題は $\mathcal{H}_s(\cdot; \mathcal{F}_t)$ と $\mathcal{H}_s(\cdot)$ の比較になる。不等号 $\mathcal{H}_s(\cdot) \leq \mathcal{H}_s(\cdot; \mathcal{F}_t)$ は定義より明らかであるので、逆に $\Lambda_c^s(\Gamma)$ が $\mathcal{H}_s(\cdot)$ の零集合ならば $\mathcal{H}_s(\cdot; \mathcal{F}_t)$ についても零集合であるかどうかの問題である。しかしこれは一般には成立しない。

注意 Γ が幾何学的有限で放物型元を含まない場合は、 $\Lambda_c^s(\Gamma)$ の点を含む任意の十分小さい円板 $\Delta(x, r)$ に対して、 $b(\gamma, t) \subset \Delta(x, 2r)$ となる影で、その半径を一定数倍すれば $\Delta(x, 2r)$ を含むようなものがとれる。したがって、この場合は両方のハウスドルフ測度が $\Lambda_c^s(\Gamma)$ 上では比較可能であり、(3) $\Rightarrow$ (2) がわかる。しかし幾何学的有限でも、放物型元を含んでいるときは成り立たない場合がある。Sullivan[S4] は $\delta(\Gamma)$ と放物型部分群のランクの大小関係により成り立つか否かの条件を与えている。

任意のクライン群 Γ に対して $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度は存在するが、特に Γ が発散型とわかっているときには一意性が成り立ち、それを PS 測度と定義した。一般には一意性は成り立たないが、標準的な構成法でできたものは次のような性質をもつ[S4]。

定理 11 任意のクライン群 Γ に対して、 $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度 μ で、極限集合上に台をもつが、有界放物型固定点にアトム (point mass) をもたないようなものが存在する。

実際、補題 3 で構成された μ は極限集合上に台をもつので、有界放物型固定点にアトムをもたないことだけを示せばよい。PS 測度は自動的にこれを満たしている。

定義 (基点の取り替え) 一般に s 次元 Γ -不変確率測度 μ と $x \in B^3$ に対して、 μ と互いに絶対連続な測度 μ_x を

$$\mu_x(E) = \int_E P(x, \zeta)^s d\mu(\zeta), \quad P(x, \zeta) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^2}$$

で定義する。 $P(x, \zeta)$ はポアソン核で、これは $x \in B^3$ を原点 0 にうつすような B^3 のメビウス変換 h_x の伸縮率 $|h'_x(\zeta)|$ のことである。ラドン・ニコディム微分は

$$\frac{d\mu_x}{d\mu}(\zeta) = \left(\frac{P(x, \zeta)}{P(y, \zeta)} \right)^s$$

となる。

ここで、 μ_x の全測度を $x \in B^3$ の関数としてみた Γ -不変な関数 $\varphi_\mu(x) = \mu_x(S^2)$ を考える。 ξ が μ のアトムかどうかで、 x が ξ に非接的に近付くときの $\varphi_\mu(x)$ の増大度に差があることをみる。

一般に $\xi \in S^2$ が s 次元 Γ -不変確率測度 μ のアトムのとき、ポアソン核の評価をすることにより、 ξ に非接的に収束する点列 $x \in B^3$ に対して、ある定数 $C_1 > 0$ が存在して

$$\varphi_\mu(x) \geq \mu_x(\{\xi\}) = P(x, \xi)^s \mu(\{\xi\}) \geq C_1 e^{s\rho(0, x)}$$

であることがわかる。これより特に、 ξ が Γ の非接的極限点の場合は、アトムとはなりえないこともわかる。それに対して、 ξ が Γ の有界放物型固定点で、アトムでないときは次のようになる。なお便宜上 ξ がランク 0 の有界放物型固定点とは、 $\xi \in \Omega(\Gamma)$ を意味することにする。

補題 12 μ を $\Lambda(\Gamma)$ に台をもつ s 次元 Γ -不変確率測度とする。 ξ を Γ のランク k ($k=0, 1, 2$) の有界放物型固定点で、 μ のアトムでないとする。このとき ξ に非接的に収束する点列 $x \in B^3$ に対して、ある定数 $C_2 < \infty$ が存在して

$$\varphi_\mu(x) \leq C_2 e^{(k-s)\rho(0, x)}$$

が成り立つ。

(証明) 上半空間 $H^3 = \{(z, t) | z \in C, t > 0\}$ で考え、しかも $\xi = \infty$ と仮定してよい。このとき $\{\mu_x\}$ は C 上の測度になるが、 $x = (z, t) \in H^3$ に対して $P(x, \xi) = 2t/|x - \xi|^2$ (これは x を 0 にうつすメビウス変換 $h_x: H^3 \rightarrow B^3$ の伸縮率 $|h'_x(\xi)|$ のこと) とおくと

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_{x_0}}(\xi) = \left(\frac{P(x, \xi)}{P(x_0, \xi)} \right)^s = \left(\frac{t(1+|\xi|^2)}{t^2+|\xi-z|^2} \right)^s$$

が満たされている。ただし $x_0 = (0, 1)$ とする。 Γ の中で ∞ の固定化群を J とし、その C 上の基本領域を E とする。このとき

$$\begin{aligned} \mu_x(C) &= \sum_{j \in J} \mu_x(j(E)) = \sum_{j \in J} \mu_{j^{-1}(x)}(E) \\ &= \sum_{j \in J} \int_E \frac{d\mu_{j^{-1}(x)}}{d\mu_{x_0}}(\xi) d\mu_{x_0}(\xi) \\ &= t^s \sum_{j \in J} \int_E \left(\frac{1+|\xi|^2}{t^2+|\xi-j^{-1}(z)|^2} \right)^s d\mu_{x_0}(\xi) \end{aligned}$$

となるが、 μ_{x_0} の台 $\Lambda(\Gamma)$ は E のなかで有界なので、最後の積分の和は

$$\int_{R^s} \frac{dx_1 \cdots dx_k}{(t^2 + x_1^2 + \cdots + x_k^2)^s} = t^{k-2s} \int_{R^s} \frac{dx_1 \cdots dx_k}{(1 + x_1^2 + \cdots + x_k^2)^s}$$

と比較可能である(これより特に $k=1, 2$ のときは $s > k/2$ でなければならない)。 B^3 に戻していうと、 x が ξ に非接的に収束するとき、 t と $e^{\rho(x_0, x)}$ は比較可能であるので、このときはある定数 $C_2 < \infty$ が存在して

$$\varphi_\mu(x) \leq C_2 e^{(k-s)\rho(0, x)}$$

が成り立つ。 ■

(定理 11 の証明) 補題 3 で構成された $\Lambda(\Gamma)$ に台をもつ $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変測度 μ を考える。 Γ がランク $k=1, 2$ の有界放物型固定点 ξ をもつとする。 $\delta(\Gamma) > k/2$ (上の証明からもわかるが、より簡単には補題 30 をみよ) に注意すると、 ξ がアトムかどうかで、 ξ に非接的に収束する $x \in B^3$ に対して

$$\varphi_\mu(x) \geq C_1 e^{\delta(\Gamma)\rho(0, x)};$$

$$\varphi_\mu(x) \leq C_2 e^{(k-\delta(\Gamma))\rho(0, x)} = C_2 e^{(\delta(\Gamma)-\epsilon)\rho(0, x)} \quad (\epsilon = 2\delta(\Gamma) - k > 0)$$

のようにオーダーに差が出てくる。軌跡 $\Gamma(0)$ 上のアトムからなるような $\overline{B^3}$ 上の確率測度 $\{\mu_s\}$ の弱収束極限として μ は構成された。その μ_s に対しても同様に $\varphi_{\mu_s}(x)$ を考えると、 $\Gamma(0)$ の各点に

与える重みの調整分(これは収束型のときに必要)を考慮しても、補題 12 の証明のようにして $\varphi_{\mu_s}(x) = O(e^{(\delta(\Gamma) - \epsilon)\rho(0, x)})$ とできる。よってその弱収束極限は ξ にアトムをもちえない。 ■

最後に、今までに述べた一般論を幾何学的有限なクライン群に適用して、それに関する結果をまとめておく [S1], [S4]。

定理 13 Γ を幾何学的有限なクライン群とすると、 Γ は発散型であり、 $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度 (PS 測度) が一意的に存在する。さらに Γ が放物型元を含まないときは、PS 測度は $h_{\delta(\Gamma)}$ と定数倍をのぞいて一致する。また $s > \delta(\Gamma)$ のときは、極限集合上に台をもつ s 次元 Γ -不変確率測度 μ_s は放物型固定点の集合上に台をもつアトムからなる測度である。

(証明) 定理 11 の $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度 μ をとる。 μ は有界放物型固定点にアトムをもたないので、 $\Lambda_c(\Gamma)$ 上に全測度をもつ。よって命題 5 より $\delta(\Gamma)$ 次元ポアンカレ級数は発散する。また一意性も従う。さらに Γ が放物型元を含まないときは、前の (3) $\Rightarrow$ (2) に関する注意より、 $h_{\delta(\Gamma)}(\Lambda_c(\Gamma)) > 0$ であるので、 $h_{\delta(\Gamma)}$ は正規化すれば一意性より μ と一致する。次に再び命題 5 より $s > \delta(\Gamma)$ のとき μ_s は $\Lambda_c(\Gamma)$ 上で零なので、放物型固定点の集合上に全測度をもつ。それは可算集合なので μ_s はアトムからなる測度である。 ■

幾何学的有限なクライン群に対しては $\dim \Lambda(\Gamma) = \dim \Lambda_c(\Gamma)$ であることに注意すれば、次の系を得る [S4], [Tu1]。

系 14 幾何学的有限なクライン群 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ がハウスドルフ次元 2 をもつための必要十分条件は $\Lambda(\Gamma) = S^2$ である。

(証明) $\Lambda(\Gamma) \neq S^2$ のとき 2 次元ポアンカレ級数は収束する。これは $x \in \Omega(\Gamma)$ に対しては $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(x)|^2 < \infty$ となることよりわかる。一方、定理 13 より Γ は発散型なので、これは $\delta(\Gamma) < 2$ を意味する。よって極限集合のハウスドルフ次元は 2 より小さい。 ■

5 幾何学的指数

非接的極限集合のハウスドルフ次元 $\dim \Lambda_c(\Gamma)$ は双曲多様体 N_Γ の幾何学的指数で評価することができる。より正確に言えば、ハウスドルフ次元は収束指数とスペクトルの底の関係を通して、 N_Γ の種々の幾何学的指数とつながってくる。

定義(スペクトルの底) 一般に完備リーマン多様体 N において、 $\lambda_0(N)$ を次のレーリー商の下限で定義し、スペクトルの底と呼ぶ：

$$\lambda_0(N) = \inf \left\{ \frac{\int_N |\nabla f|^2}{\int_N |f|^2} \mid f \in C_0^\infty(N) \right\}$$

双曲多様体 N_Γ のスペクトルの底を特に $\lambda_0(\Gamma)$ で表す。

$\lambda_0(N)$ は N 上のラプラス・ベルトラミ作用素 Δ に関する滑らかな正值固有関数の固有値の集合の上限(実際は最大値)に一致する。また Δ は N 上 2 乗可積分な関数のなすヒルベルト空間の半正值自己共役作用素に一意的に拡張するが、このとき $\lambda_0(N)$ はこの作用素の固有値の集合の下限とも一致する。幾何学的には $\lambda_0(N)$ は次のような定数と関係がある。

定義(等周定数, 体積増大度) クライン群 Γ に対して

$$h(\Gamma) = \inf_W \frac{\text{Area}(\partial W)}{\text{Vol}(W)}$$

を N_Γ の等周定数という。ただし W は相対コンパクトな N_Γ の部分領域全体を動く。また

$$\kappa(\Gamma) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \text{Vol}(B(p, r))$$

を N_Γ の体積増大度という。ただし $B(p, r)$ は p から距離 r 以内にある N_Γ の部分領域を表す。

Cheeger, Buser, Brooks はそれぞれ次の結果を証明した。

命題 15 次の関係式が成り立つ。

$$[\text{Ch}] \quad \lambda_0(\Gamma) \geq \frac{1}{4} h(\Gamma)^2$$

$$[\text{Bu}] \quad \text{ある普遍定数 } C \text{ が存在して } \lambda_0(\Gamma) \leq Ch(\Gamma)$$

$$[\text{Br}] \quad \lambda_0(\Gamma) \leq \frac{1}{4} \kappa(\Gamma)^2$$

Canary[C1]は、位相的に素直な双曲多様体 N_Γ においては幾何学的無限エンド(凸核 C_Γ に含まれるエンド)は放物型、幾何学的有限エンド($\Omega(\Gamma)$ に面するエンド)は双曲型であるので、 C_Γ の体積と境界の面積の比を考えると等周定数の評価が与えられることを示した。凸核の境界 ∂C_Γ の面積は Bers の面積定理により N_Γ の位相型(より具体的には Γ の生成元の最小個数)で押さえられるので、Buser 型の評価とあわせて次がいえる。

定理 16 位相的に素直な双曲多様体 N_Γ に対して

$$\lambda_0(\Gamma) \leq \frac{K}{\text{Vol}(C_\Gamma)}$$

が成り立つ。ただし K は N_Γ の位相型のみによる定数である。特に Γ が幾何学的に有限でないならば $\lambda_0(\Gamma) = 0$ である。

以下この節では、収束指数とスペクトルの底との関係を与えた次の Elstrodt-Patterson-Sullivan の定理について解説する。

定理 17 任意のクライン群 Γ に対して

$$\lambda_0(\Gamma) = \begin{cases} 1 & (\delta(\Gamma) \leq 1) \\ \delta(\Gamma)(2 - \delta(\Gamma)) & (\delta(\Gamma) > 1) \end{cases}$$

が成り立つ。

証明は Sullivan[S5]によって与えられているが、ここでは Marden 予想が正しいこと(Ohshika [O])を仮定して証明を与える。特にフックス群の場合に対しては正しい証明になっている。

s 次元 Γ -不変確率測度 μ に対して、 Γ -不変な関数 $\varphi_\mu(x) = \int_{S^2} P(x, \zeta)^s d\mu(\zeta)$ を考える。ポアソン核は $\Delta P(x, \zeta)^s = s(2-s)P(x, \zeta)^s$ を満たすので、 $\varphi_\mu(x)$ を N_Γ に射影すると、 Δ の固有値 $s(2-s)$ に対する正值固有関数になる。特に μ として $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度をとると次がわかる。

命題 18 N_Γ 上 Δ は固有値 $\delta(\Gamma)(2 - \delta(\Gamma))$ に対する正值固有関数をもつ。したがって

$$\lambda_0(\Gamma) \geq \delta(\Gamma)(2 - \delta(\Gamma))$$

が成り立つ。

次に、特別なクライン群に対してはこの固有関数が 2 乗可積分であることをみて、定理 17 の等

式が成り立つことを示す([S4], [Pt3]参照).

補題 19 幾何学的有限な Γ が $\delta(\Gamma) > 1$ を満たしているとする, Γ に関する PS 測度 μ から定義した φ_μ は N_Γ 上で 2 乗可積分になる.

(証明) 凸核 C_Γ の ϵ -近傍を C_Γ^* で表す. カスプ近傍を除くと C_Γ^* はコンパクトである. Γ がランク k の有界放物型固定点 ξ をもつとすると, 補題 12 より, x が非接的に ξ に収束するとき $\varphi_\mu(x) = O(e^{(k-\delta(\Gamma))\rho(0,x)})$ である. 補題 30 より $\epsilon = 2\delta(\Gamma) - k$ は正であり, $\varphi_\mu(x) = O(e^{(k-\epsilon)\rho(0,x)/2})$ となる. これより, カスプ近傍でも φ_μ は 2 乗可積分であることがわかる.

次に $W = N_\Gamma - C_\Gamma^*$ でも 2 乗可積分であることをみる. W の任意の点 p をそこから最短のところにある $\Sigma = \partial C_\Gamma^*$ の点 p' に対応させ, 写像 $p \mapsto (p', t)$ (ただし $t = \rho(p, p')$) をつくと, これは同相写像 $h: W \rightarrow W' = \Sigma \times (0, \infty)$ を与える. さらに W' に計量 $e^{2t} ds_\Sigma^2 + dt^2$ (ds_Σ^2 は Σ の双曲計量) を与えると, h は擬等距離写像になる ([C2] 参照). よってこの計量での積分が有限になることをみればよい. 補題 12 より φ_μ は $t \rightarrow \infty$ のとき $O(e^{-t\delta(\Gamma)})$ であるので, $\int_0^\infty e^{2t-2t\delta(\Gamma)} dt$ を考えればよいが, 仮定より $\delta(\Gamma) > 1$ なのでこれは収束する. ■

一方, 幾何学的有限な クライン群 Γ で $\delta(\Gamma) \leq 1$ の場合であるが, まず自明な群については $\lambda_0(\{1\}) = 1$ が知られていて, かつ上でみたように $\delta(\Gamma) \downarrow 1$ のときは $\lambda_0(\Gamma) \uparrow 1$ であるので, その間の $0 < \delta(\Gamma) \leq 1$ でも恒等的に $\lambda_0(\Gamma) = 1$ であると想像できる. 以下実際これを示す. 一般に $\Gamma \subset G$ ならば, N_G 上の Δ の正值固有関数は, 同じ固有値をもつ N_Γ 上の関数に持ち上がるので, $\lambda_0(\Gamma) \geq \lambda_0(G)$ がわかる. よって任意の $\epsilon > 0$ に対して, Γ を含む幾何学的有限な クライン群 G で $1 < \delta(G) < 1 + \epsilon$ を満たすものの存在をいえばよい. このためには, 以下の Patterson [Pt2] の結果より, $\delta(\Gamma') = 1$ を満たす幾何学的有限な Γ' (たとえば フックス群) と Γ の クライン結合を考えればよい (この収束指数が 1 より真に大きいことは, 補題 30 よりわかる).

命題 20 不連続領域が空でない クライン群 Γ, Γ' に対して, 発散するメビウス変換の列 g_n で, Γ と $g_n \Gamma' g_n^{-1}$ が クライン結合で クライン群 $G_n = \Gamma * g_n \Gamma' g_n^{-1}$ を生成し, かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(G_n) = \max\{\delta(\Gamma), \delta(\Gamma')\}$$

となるものが存在する.

以上で幾何学的有限な クライン群 に対しては定理 17 が成り立つことが示された. さらに定理 16 と命題 18 より, 幾何学的有限でなくても位相的に素直な双曲多様体 に対しては $\lambda_0(\Gamma) = 0$, $\delta(\Gamma) = 2$ で等式が成り立つ. よって Marden 予想を仮定すれば, 定理はすべての有限生成 クライン群で成り立つ. 最後にこれを無限生成の場合に拡張するためには以下の補題を用いればよい. ここで, クライン群の列 $\{\Gamma_n\}$ に対して,

$$\text{Env}\{\Gamma_n\} = \{\gamma \in \text{PSL}_2(C) \mid \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n (\gamma_n \in \Gamma_n)\}$$

と定義する.

補題 21 クライン群の列 $\{\Gamma_n\}$ に対して, Γ を $\text{Env}\{\Gamma_n\}$ の離散部分群とすると, $\delta(\Gamma) \leq \liminf \delta(\Gamma_n)$ が成り立つ. クライン群 Γ が $\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n$, $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots$ と表されたとすると, $\delta(\Gamma) = \lim \delta(\Gamma_n)$ と $\lambda_0(\Gamma) = \lim \lambda_0(\Gamma_n)$ が成り立つ.

(証明) μ_n を $\delta(\Gamma_n)$ 次元 Γ_n -不変確率測度とする. 部分列をとり $\delta(\Gamma_n)$ がある値 d に収束するよ

うにし、さらに部分列をとり μ_n が S^2 上のある測度 μ に弱収束するようにできる。このとき μ は d 次元 Γ -不変確率測度になっている。したがって $d \geq \alpha(\Gamma) = \delta(\Gamma)$ であるので、前半の主張を得る。また後半の仮定のもとでは $\delta(\Gamma) \geq \delta(\Gamma_n)$ であるので、 $\delta(\Gamma) = \lim \delta(\Gamma_n)$ を得る。さらに $\lambda_0(\Gamma)$ については、任意の $\epsilon > 0$ に対して、レーリー商が $\lambda_0(\Gamma) + \epsilon$ より小さくなるような関数 $f \in C_0^\infty(N_\Gamma)$ を考える。十分大きな n では f の台は N_{Γ_n} の中にあるとみなせるので、 $\lambda_0(\Gamma_n) \leq \lambda_0(\Gamma) + \epsilon$ がわかる。 $\lambda_0(\Gamma) \leq \lambda_0(\Gamma_n)$ とあわせて主張を得る。 ■

6 幾何学的収束とハウスドルフ次元の連続性

クライн群の変形にともなう極限集合のハウスドルフ次元の変化を考える。擬等角変形で(タイヒミュラー距離に関して)ハウスドルフ次元が連続的に変化することは、擬等角写像の歪曲定理([As]参照)よりわかる。さらにいくつかのクライン群については、擬等角変形空間上の実解析関数になっていることもわかる[Ru], [AR]。問題は擬等角変形空間の境界、さらには一般にクライン群の列の収束に対するハウスドルフ次元の連続性である。そのためにも、収束についていくつかの概念を定義する。

定義(代数的収束) 一般に群 Γ_0 の $PSL_2(C)$ 表現の列 $\theta_n: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$ が表現 $\theta: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ に代数的に収束するとは、任意の元 $\gamma \in \Gamma_0$ について $\theta_n(\gamma)$ が $\theta(\gamma)$ に収束することである。

以下代数的収束といえば、 Γ_0 は有限生成であることを常に仮定する。代数的収束において Γ_n がクライン群のとき、その代数的極限 Γ も自動的にクライン群になる。

代数的収束は代数的構造を保存するが、必ずしも対応する双曲多様体の幾何構造の収束を意味しない。第5節でみたように、極限集合のハウスドルフ次元は双曲多様体の幾何学的性質を反映しているので、ハウスドルフ次元の連続性のためには次に定義するクライン群の列の幾何学的収束も考慮する必要がある。

定義(幾何学的収束) $PSL_2(C)$ の部分群の列 Γ_n が G に幾何学的に収束するとは、 Γ_n が $PSL_2(C)$ の閉部分集合の列として G にハウスドルフ収束することである。すなわち次の2条件が満たされることである。

- 任意の $g \in G$ は $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ ($\gamma_n \in \Gamma_n$) として書ける。
- $g = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{n_i}$ ($\gamma_{n_i} \in \Gamma_{n_i}$) として書ける元は G に属する。

射影 $B^3 \rightarrow N_\Gamma = B^3/\Gamma$ による原点 $0 \in B^3$ の像を o_Γ とする。このときクライン群 Γ_n が G に幾何学的に収束するということは、双曲多様体のレベルでは基点付きの多様体の列 $(N_{\Gamma_n}, o_{\Gamma_n})$ が (N_G, o_G) に Gromov 収束することにほかならない。すなわち、 n が大きくなるにつれて、双方の基点からみてより広い範囲どうしが等距離写像により近似的な微分同相でうつりあう。

一般に基点付きの双曲多様体の列は、基点における単射半径が一様の下から押さえられているならば、Gromov 収束する部分列を選ぶことができる。したがってその条件が満たされるような仮定のもとでは、クライン群の列から幾何学的に収束する部分列を選ぶことができる。代表的な仮定としてはクライン群の列がすでに代数的に収束していることである。

命題 22 クライン群 Γ_n の上への準同型 $\theta_n: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$ が $\theta: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ に代数的に収束しているならば、 Γ_n のある部分列は Γ を含むあるクライン群 G に幾何学的に収束する。

Bishop-Jones[BJ]は有限生成クライン群の極限集合のハウスドルフ次元の代数的収束のもとでの下半連続性を証明した。

定理 23 クライン群 Γ_n の上への準同型 $\theta_n: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$ が $\theta: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ に代数的に収束しているならば、

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \dim \Lambda(\Gamma_n) \geq \dim \Lambda(\Gamma)$$

が成り立つ。

補題 21 から代数的、幾何学的どちらの収束に関しても、非接的極限集合のハウスドルフ次元が下半連続性をもつことがわかる。よって定理 23 において極限が幾何学的有限の場合には主張は直ちに従う。以下では、極限が幾何学的有限でない場合には、より強く連続性が成り立つことをみる。本質的なのは次の Bishop-Jones[BJ]による結果である。

定理 24 有限生成クライン群 Γ が幾何学的有限でないならば $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$ が成り立つ。

(方針) 簡単のため凸核 C_Γ の相対境界 ∂C_Γ が全測地的である場合について理由を説明する。 C_Γ の ∂C_Γ に関するダブルを N とする。 N はあるクライン群 G によって $N = N_G$ と表される。 $\lambda_0(\Gamma) = 0$ のときは命題 18 より $\dim \Lambda_c(\Gamma) = 2$ なので、 $\lambda_0(\Gamma) > 0$ の場合のみを考えればよい。このとき Ahlfors の有限性定理より ∂C_Γ は面積有限であり、かつ仮定より C_Γ は幾何学的有限でないエンドをもつので、 N_G についても $\lambda_0(G) > 0$ がわかる(たとえば等周定数を考えれば想像しやすい)。したがって、特に N_G の理想境界の調和測度は正であり、 ∂C_Γ で分けた半分の C_Γ の理想境界の調和測度も正である。これは極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ の 2 次元測度が正であることと同値であり、特に $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$ がわかる。 ■

注意 N_Γ が位相的に素直という仮定のもとでは、定理 16 はより強く $\dim \Lambda_c(\Gamma) = 2$ を主張している。また、幾何学的有限な Γ については $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$ であるための条件はわかっている(系 14)、上の定理とあわせると、有限生成クライン群については、極限集合がハウスドルフ次元 2 をもつための必要十分条件が完全に与えられる。しかし無限生成の場合はまだ完全には調べられていない。必要条件のひとつとして凸核の境界からの距離の非有界性がある[Mt2]。十分条件のひとつとしては、定理 24 の証明からもわかるとおり、Ahlfors 有限性定理の帰結である $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ の解析的有限性が挙げられる[BJ]。

したがって、次の補題より定理 23 の証明が完成する。

補題 25 クライン群 Γ_n の上への準同型 $\theta_n: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_n$ が $\theta: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ に代数的に収束していて、 Γ が幾何学的有限でないならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(\Gamma) (= 2)$$

が成り立つ。

(証明) 部分列をとり、 Γ_n がすべて幾何学的有限であるか、すべて幾何学的有限でないかのどちらかと仮定してよい。後者の場合は定理 24 より主張は明らか。よって Γ_n がすべて幾何学的有限であるとする。部分列をとり、 $\dim \Lambda(\Gamma_n)$ が収束し、かつ命題 22 より Γ を含むクライン群 G に幾何学的に収束しているとしてよい。もしも $\lim \dim \Lambda(\Gamma_n) < 2$ であるとする、定理 16 より凸核 C_{Γ_n} の体積は一樣に上から押さえられる。このとき幾何学的極限 G の凸核 C_G の体積も有限(G は幾何学的有限)であり(Taylor[Ta])、下半連続性より $\dim \Lambda(G) = \dim \Lambda_c(G) < 2$ となる。しか

しこれは $\dim \Lambda(\Gamma) = 2$ に反する。よって $\lim \dim \Lambda(\Gamma_n) = 2$ であり、主張が成り立つ。 ■

注意 クライン群の列 Γ_n が幾何学的に G に収束する場合にも、 G が有限生成であるが幾何学的有限でないときには $\lim \dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(G)$ が成り立つ。一般に幾何学的極限が有限生成のときには、十分大きな n に対して、(上へのとは限らない) 準同型写像 $\phi_n: G \rightarrow \Gamma_n$ で恒等写像 $\text{id}: G \rightarrow G$ に代数的に収束するものが存在する [JM]。これに対して補題 25 を適用すれば上の主張が得られる。

以上により、極限集合のハウスドルフ次元の収束の問題については、極限が幾何学的有限の場合が重要であるので、その場合のみを主に考える。

まず、幾何学的収束が必ずしも極限集合のハウスドルフ次元の収束を意味しない簡単な例をあげる。

例 クライン群 Γ_0 の指数有限の部分群の列 $\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \cdots$ で幾何学的に $\{1\}$ に収束するものをとる(たとえば頂点での単射半径が ∞ に増大するようにとればよい)。このとき $\dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(\Gamma_0) > 0$ であるが、 $\dim \Lambda(\{1\}) = 0$ である。また、 $\Lambda(\Gamma_n) = \Lambda(\Gamma_0)$ は $\Lambda(\{1\}) = \emptyset$ にハウスドルフ収束していない。

ハウスドルフ次元の収束をみるために、次のような方針を考える：幾何学的有限な Γ_n に関する PS 測度 μ_n の弱収束極限を μ とする。この μ が G に関する PS 測度になっていることが判定できれば、収束指数 $\delta(\Gamma_n)$ は $\delta(G)$ に収束し、 $\dim \Lambda(\Gamma_n) \rightarrow \dim \Lambda(G)$ を得る。 μ は G -不変確率測度であるが、一般には $\Omega(G)$ 上にも正の測度をもつかもされない。もし $\Lambda(\Gamma_n)$ が $\Lambda(G)$ にハウスドルフ収束しているとする、 μ は $\Lambda(G)$ 上に台をもつので、PS 測度であることの必要条件のひとつが満たされる。よってこの方針に沿うためには、収束に条件を課して、極限集合のハウスドルフ収束が保証されるようにしたい。

注意 しかし、極限集合がハウスドルフ収束しなくても、ハウスドルフ次元が収束することはある。たとえば命題 20 の構成法でクライン結合 $G_n = \Gamma * g_n \Gamma' g_n^{-1}$ が Γ に幾何学的に収束するようにできるが、 $\Lambda(G_n)$ は $\Lambda(\Gamma)$ にハウスドルフ収束しない([MT]の Corollary 7.34 は仮定が不十分であることに注意!)。 $\delta(\Gamma) < \delta(\Gamma')$ のときはハウスドルフ次元は収束しない(このとき PS 測度の弱収束極限 μ は $\Omega(\Gamma)$ 上にも正の測度をもつ)が、 $\delta(\Gamma) \geq \delta(\Gamma')$ のときは収束する。

極限集合がハウスドルフ収束し、幾何学的極限 G が放物型元を含まない幾何学的有限なクライン群のときは、極限集合上に台をもつ G -不変確率測度は PS 測度しかありえないので、ハウスドルフ次元の収束がいえる。しかし G が放物型元を含む場合、極限集合がハウスドルフ収束しても、ハウスドルフ次元が収束するとは限らない。PS 測度の弱収束極限 μ が G の放物型固定点上のアトムからなる測度になる場合があり、そのときは $\delta(G)$ は μ の次元より小さくなる。たとえば、多様体レベルでいえば、Gromov 収束するときにかスプになってちぎれて「主要部」が捨てられ、新しくできたカスプに対応する放物型固定点上に、消えた主要部にあった測度が集中して残る場合がそうである。

そこで、幾何学的収束で多様体の幾何構造を収束させ、代数的収束で基本群の構造を保つ(極限で多様体がちぎれることがない)ようにするために、両方をあわせもった収束を次のように定義する。

定義(強収束) クライン群の列 Γ_n が G に強収束するとは、 Γ_n が G に幾何学的に収束し、かつ

十分大きな n に対して上への準同型 $\psi_n: G \rightarrow \Gamma_n$ で $\text{id}: G \rightarrow G$ に代数的に収束するものが存在することをいう。

注意 忠実な離散表現の列の代数的収束が同時に幾何学的収束にもなっていることで通常は強収束を定義するが、上の定義は明らかにこの定義を含んでいる。さらに、代数的極限と幾何学的極限が異なっている場合でも、幾何学的極限が有限生成であるならば、これも上の定義の意味で強収束になっている。実際、有限生成幾何学的極限からの(上へのとは限らない)準同型で、恒等写像に収束するものは十分大きな n に対して存在したが、もとの列の代数的収束も仮定すると、これは上への準同型になっている [JM].

強収束し極限が幾何学的有限であるときには、収束列も十分先では幾何学的有限であり、極限集合の列もハウスドルフ収束していることがわかる [JM], [Mc]. しかし、それでもなおハウスドルフ次元が収束しない例が McMullen [Mc] によって挙げられている。

強収束のもとでの双曲多様体のスペクトルの底の収束に関して、Canary-Taylor [CT2] は McMullen と独立に、より幾何学的な証明で次を示した。また、Fan-Jorgenson [FJ] も強収束のもとでの双曲多様体の熱核の収束を示し、同様の結果を得ている。

定理 26 クライン群の列 Γ_n が G に強収束し、かつ N_G が位相的に素直であるとする、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0(\Gamma_n) = \lambda_0(G)$ が成り立つ。

スペクトルの底が収束するのに、ハウスドルフ次元が収束するとは限らないのは、両者の関係(定理 17)において、収束指数が 1 以下のときはスペクトルの底は 1 で一定であるからである。実際 McMullen による反例はこの 1 を境にして起きている。彼は逆に強収束のもとでのハウスドルフ次元の収束に関する結果をより解析的な方法で証明し、それをスペクトルの底の収束に読み替えて上の定理を得ている [Mc].

定理 27 クライン群の列 Γ_n が有限生成クライン群 G で $\dim \Lambda(G) \geq 1$ を満たすものに強収束しているならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(G)$ が成り立つ。

7 ハウスドルフ次元 1

ハウスドルフ次元 1 はクライン群の極限集合の次元として特別の位置にある。実際いままでの議論で、ハウスドルフ次元や収束指数が 1 を境にして様相が異なる場面がいくつかあった。フックス群の極限集合のハウスドルフ次元は明らかに 1 であるが、Bowen [Bo] は擬フックス群の極限集合のハウスドルフ次元が 1 であるものはフックス群に限ることを証明した。これを一般化して、有限生成クライン群で極限集合のハウスドルフ次元が 1 以下であるものを完全に決定する [CT1], [BJ].

定義(擬フックス群) 幾何学的有限なクライン群 Γ で、 $\Omega(\Gamma)$ が 2 つの Γ -不変なジョルダン領域からなるものを擬フックス群という。特にそのジョルダン領域がともに円板のときをフックス群という。

定理 28 極限集合のハウスドルフ次元が 1 である擬フックス群はフックス群に限る。

(証明) Γ を擬フックス群とし、極限集合のハウスドルフ次元が 1 であると仮定する。補題 6 より、 $\Lambda(\Gamma)$ の 1 次元ハウスドルフ測度は有限、すなわち $\Lambda(\Gamma)$ は求長可能である。よって次の補題

より Γ はフックス群である。

補題 29 擬フックス群 Γ の極限集合が求長可能ならばそれはフックス群である。

(証明) $\Omega(\Gamma)$ の 2 つの成分を Ω_1, Ω_2 とし, 単位円板 Δ およびその補集合 $\Delta^* = \hat{\mathbb{C}} - \Delta$ からのリーマン写像 $f_1: \Delta \rightarrow \Omega_1, f_2: \Delta^* \rightarrow \Omega_2$ を考える. f_1^{-1}, f_2^{-1} は Γ からそれぞれフックス群 Γ_1, Γ_2 への共役を与える. f_1, f_2 は境界まで同相に延びるので, $\partial\Delta$ の同相写像 $(f_2)^{-1} \circ f_1$ が定義できる. $\Lambda(\Gamma)$ が求長可能であることより, $\Lambda(\Gamma)$ 上の 1 次元ハウスドルフ測度は調和測度と互いに絶対連続になる. したがって $(f_2)^{-1} \circ f_1$ は円周上のルベグ測度に関して絶対連続であり, フックス群 Γ_1 から Γ_2 への共役を与えている. フックス群の剛性「 Γ の共役を与える円周の自己同相写像は, ルベグ測度に関して(全)特異であるか, またはメビウス変換の制限である」より, これはメビウス変換の $\partial\Delta$ への制限である. これより Γ がフックス群であることがわかる. ■

注意 擬フックス群はフックス群の擬等角変形としても定義できる. (有限生成とは限らない)「一般のフックス群」の擬等角変形についても補題 29 の主張を考えることができるが, これは一般には成り立たない. 理由は, 証明の中にあるフックス群の剛性が成り立つのは, Γ に関する 1 次元ポアンカレ級数が発散するときに限るからである ([Mt1] 参照). Astala-Zinsmeister はこの必要性を証明したが, さらにフックス群の非自明な擬等角変形で, 極限集合が求長可能な例も与えている [AZ].

Bowen の結果を拡張するためには次の補題が便利である。

補題 30 クライン群 Γ が発散型クライン群 H を部分群にもち, $\Lambda(\Gamma)$ が $\Lambda(H)$ を真に含むならば, $\delta(\Gamma) > \delta(H)$ が成り立つ. 特に Γ がランク $k=1, 2$ の放物型アーベル離散群を含むならば, $\delta(\Gamma) > k/2$ が成り立つ.

(証明) $\delta(\Gamma)$ 次元 Γ -不変確率測度 μ をとる. ある円板 $\Delta = \Delta(x, r) \subset \Omega(H)$ で, $\mu(\Delta) > 0$ かつ単位元以外のすべての $h \in H$ に対して $\Delta \cap h(\Delta) = \emptyset$ を満たすものがとれる.

$$1 > \sum_{h \in H} \mu(h(\Delta)) \approx \mu(\Delta) \cdot \sum_{h \in H} |h'(x)|^{\delta(\Gamma)}$$

より, H に関する $\delta(\Gamma)$ -次元ポアンカレ級数は収束する. H は発散型なので, これより $\delta(\Gamma) > \delta(H)$ がわかる.

ランク k の放物型アーベル離散群 J に対して, 級数 $\sum_{j \in J} |j'(z)|^s (z \in \Omega(J))$ は $s > k/2$ で収束し, $s \leq k/2$ で発散する (補題 12 参照). よって後半の主張を得る. ■

定理 31 有限生成クライン群 Γ について, 極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ のハウスドルフ次元が 1 以下であるならば, $\Lambda(\Gamma)$ は円であるかまたは完全不連結な集合である.

(証明) 一般に, Γ は擬フックス群を部分群にもつか, 全退化群を部分群にもつか, あるいは $\Lambda(\Gamma)$ は完全不連結な集合になるかのどれかである. しかし全退化群の極限集合のハウスドルフ次元は, 定理 16 あるいは定理 24 より 2 である. よって全退化群を部分群にもつことはない. Γ が擬フックス群 H を部分群にもつとすると, 定理 28 より H はフックス群である. このとき補題 30 より $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(H)$ がわかる.

系 32 有限生成クライン群の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ のハウスドルフ次元が 1 より小さいならば, 双曲多様体 N_Γ はハンドル体の内部に同相である.

(証明) 定理 31 より $\Lambda(\Gamma)$ は完全不連結な集合である. Γ がランク 2 の放物型部分群を含むと,

補題 30 より $\dim \Lambda(\Gamma) > 1$ になる. よって Γ は放物型元も許すショットキー群であり, N_Γ はハンドル体の内部に同相である. ■

この結果より, ハウスドルフ次元が双曲多様体のトポロジーを決定する場合があることがわかった. そこで逆に, 多様体の位相不変量をハウスドルフ次元から定義する.

定義 双曲計量を許容しうる(境界付き)コンパクト 3 次元多様体 M に対して, 双曲多様体 N_Γ が M の内部と同相となるようなクライン群 Γ すべてにわたってとった $\dim \Lambda(\Gamma)$ の下限を $D(M)$ とおく.

系 32 より, $D(M) = 0$ ならば M はハンドル体であるが, 逆に M がハンドル体ならば命題 20 の原理で $D(M) = 0$ であることもわかる. 次に可能な $D(M)$ の値は 1 であるが, M が曲面上の区間束(直積またはねじれ束)のときは $D(M) = 1$ である. Canary-Minsky-Taylor[CMT] は, その他のものも含めて $D(M) = 1$ となる M を完全に決定した. 直観的にいえば, M が直積の構造をもつ部分がつながってできているとすると, 各部分に対応する擬フックス群のハウスドルフ次元が 1 に収束しつつ, 全体としてはひとつの部分だけが残って, フックス群に幾何学的に収束するような列を考えれば, 命題 20 と同様の原理で $D(M) = 1$ がわかる. 逆にそのようなものではない M については $D(M) > 1$ を証明しているが, ここでは最も単純な場合についてのみ証明を与えておく.

命題 33 区間束ではない M が非円環的であるならば $D(M) > 1$ である.

(証明) あるクライン群の列 Γ_n で, N_{Γ_n} が M と同相で $\dim \Lambda(\Gamma_n) \rightarrow 1$ となるものが存在したとする. 非円環的な M に対応するクライン群列の代数的位相に関するコンパクト性[Th]より, $\theta_n: \pi_1(M) \rightarrow \Gamma_n$ は忠実な離散表現 $\theta: \pi_1(M) \rightarrow \Gamma$ に代数的に収束しているとしてよい. このとき仮定と定理 23 より $\dim \Lambda(\Gamma) \leq 1$ となるが, これは定理 31 に反する. ■

文 献

- [AR] J. Anderson and A. Rocha, Analyticity of Hausdorff dimension of limit sets of Kleinian groups, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **22**(1997), 349–364.
- [Ah] L. Ahlfors, Möbius transformations in several dimensions, *Lecture Notes at University of Minnesota*, 1981.
- [As] K. Astala, Area distortion of quasiconformal mappings, *Acta Math.* **173**(1994), 37–60.
- [AZ] K. Astala and M. Zinsmeister, Abelian coverings, Poincaré exponent of convergence, and holomorphic deformations, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **20**(1995), 81–86.
- [BJ] C. Bishop and P. Jones, Hausdorff dimension and Kleinian groups, *Acta Math.* **179**(1997), 1–39.
- [Bo] R. Bowen, Hausdorff dimension of quasi-circles, *Publ. Math. IHES.* **50**(1979), 11–26.
- [Br] R. Brooks, A relation between growth and the spectrum, *Math. Z.* **178**(1981), 501–508.
- [Bu] P. Buser, A note on the isoperimetric constant, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **15**(1982), 213–230.
- [C1] R. Canary, On the Laplacian and the geometry of hyperbolic 3-manifolds, *J. Diff. Geom.* **36**(1992), 349–367.
- [C2] R. Canary, Ends of hyperbolic 3-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **6**(1993), 1–35.
- [CT1] R. Canary and E. Taylor, Kleinian groups with small limit sets, *Duke Math. J.* **73**(1994), 371–381.
- [CT2] R. Canary and E. Taylor, Hausdorff dimension and limits of Kleinian groups, *Geom. Funct. Anal.* (to appear).
- [CMT] R. Canary, Y. Minsky and E. Taylor, Spectral theory, Hausdorff dimension and the topology of hyperbolic 3-manifolds, *J. Geom. Anal.* (to appear).
- [Ch] J. Cheeger, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, in *Problems in Analysis*, 195–199. Princeton Univ. Press, 1970.
- [Fa] K. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Univ. Press, 1985.
- [FJ] C. Fan and J. Jorgenson, Small eigenvalues and Hausdorff dimension of sequences of hyperbolic 3-manifolds, preprint.
- [Fe] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, 1969.
- [JM] T. Jørgensen and A. Marden, Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups, *Math.*

- Scand. **66**(1990), 47-72.
- [Mg] W. Magnus, Noneuclidean tessellations and their groups, Academic Press, 1974.
- [Mt1] K. Matsuzaki, Several characterizations of Fuchsian groups of divergence type, in Complex Analysis on Hyperbolic 3-manifolds, RIMS Kokyuroku **882**(1994), 51-56.
- [Mt2] K. Matsuzaki, Hausdorff dimension of the limit sets of infinitely generated Kleinian groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (to appear).
- [MT] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Hyperbolic manifolds and Kleinian groups, Oxford Univ. Press, 1998.
- [Mc] C. McMullen, Hausdorff dimension and conformal dynamics I: Strong convergence of Kleinian groups, preprint.
- [N] P. Nicholls, The ergodic theory of discrete groups, LMS Lecture Note Series **143**, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [O] K. Ohshika, An approach to Marden's conjecture for finitely generated Kleinian groups, in Analysis of discrete groups, RIMS Kokyuroku **967**(1996), 100-101.
- [Pt1] S. Patterson, The limit set of a Fuchsian group, Acta Math. **136**(1976), 241-273.
- [Pt2] S. Patterson, Further remarks on the exponent of convergence of Poincaré series, Tôhoku Math. J. **35**(1983), 357-373.
- [Pt3] S. Patterson, Lectures on measures on limit sets of Kleinian groups, in Analytical and geometric aspects of hyperbolic space, 281-323, LMS Lecture Note Series **111**, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [Po] H. Poincaré, Papers on Fuchsian functions, Springer, 1985.
- [Ro] C. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge Univ. Press, 1970.
- [Ru] D. Ruelle, Repellers for real analytic maps, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2**(1982), 99-107.
- [S1] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. IHES. **50**(1979), 172-202.
- [S2] D. Sullivan, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, in Riemann surfaces and related topics, Ann. Math. Studies. **97**(1981), 465-496.
- [S3] D. Sullivan, Discrete conformal groups and measurable dynamics, Bull. Amer. Math. Soc. **6**(1982), 57-73.
- [S4] D. Sullivan, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, Acta Math. **153**(1984), 259-277.
- [S5] D. Sullivan, Related aspects of positivity in Riemannian geometry, J. Diff. Geom. **25**(1987), 327-351.
- [Ta] E. Taylor, Geometric finiteness and the convergence of Kleinian groups, Comm. Anal. Geom. **5**(1997), 497-533.
- [Th] W. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds I: Deformation of acylindrical 3-manifolds, Ann. of Math. **124**(1986), 203-246.
- [Tu1] P. Tukia, The Hausdorff dimension of the limit sets of geometrically finite Kleinian groups, Acta Math. **152**(1984), 127-140.
- [Tu2] P. Tukia, The Poincaré series and conformal measure of conical and Myrberg limit points, J. Analyse Math. **62**(1994), 241-259.

(1998年5月25日提出)

(まつざき かつひこ・お茶の水女子大学理学部)