円周の微分同相写像のタイヒミュラー空間

松崎 克彦　(早稲田大学)*

概　要

擬等角写像によるタイヒミュラー空間論の枠組みでは，普遍タイヒミュラー空間の部分空間として各種の滑らかさをもつ円周の自己同相写像のタイヒミュラー空間が考えられる．とくに微分が α 次のヘルダー連続性をもつ微分同相写像のタイヒミュラー空間を定義し，この空間に関する基本的な性質を述べる．たとえば，このタイヒミュラー空間は複素バナッハ多様体の構造をもち，位相は微分同相写像族の $C^{1+\alpha}$-位相から誘導される位相と一致し，位相群としての構造ももつ．

円周の対称写像のなすタイヒミュラー空間は普遍タイヒミュラー空間の葉層化を与える．この空間は漸近的タイヒミュラー空間の理論で重要な役割を果たし，微分同相写像のタイヒミュラー空間を内包する．フックス群の対称写像による共役が与えるヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群への表現の剛性を紹介し，その応用を述べる．可積分なベルトラミ微分が定義するタイヒミュラー空間も考察し，その上にヴェイユ・ピーターソン計量の拡張を導入する．この空間の性質を利用して，ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像からなる群が，同じ滑らかさをもつ写像によりフックス群の共役となるための条件を与える．

1. 普遍タイヒミュラー空間

一般的には，閉曲面 Σ_g の複素構造（双曲構造）の変形空間のことをタイヒミュラー空間といい，T_g で表す．複素構造の変形空間とは，Σ_g 上の複素構造と基点からの道（マーキング）の組のことであり，道は連続写像のホモトピー類で表現する．マーキングの違いを無視するモノドロミーはタイヒミュラーモジュラー群（写像類群）Mod_g で与えられ，Σ_g 上の複素構造の全体の空間であるモジュライ空間は T_g/Mod_g で表される．

普遍タイヒミュラー空間 T は上記を含め任意のタイヒミュラー空間を記述できる対象であり，タイヒミュラーモジュラー群に相当する Mod をもつ．Σ_g $(g \geq 2)$ の複素構造をひとつ固定して，フックス群 Γ で一意化すると，$\Gamma \subset \mathrm{Mod}$ の T への作用の固定点からなる T の部分空間が T_g に相当する．

この節の内容は [1], [15], [19], [20], [27] などの著書に解説がある．

1.1. 擬対称写像群と普遍タイヒミュラー空間

$\mathbb{D}$ を単位円板，$\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ を単位円周とする．$\mathbb{S} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ を保つ一次分数変換全体（$\cong PSL(2,\mathbb{R})$）を Möb で表し，メビウス変換群とよぶ．$\mathbb{D}$ の自己擬等角写像 $\widehat{g}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全体からなる擬等角写像群を $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ で表す．これは等角写像群 $\mathrm{Conf}(\mathbb{D})$ を含む．$\widehat{g} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{S}$ まで向きを保つ同相写像として拡張し，$q:\mathrm{QC}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{S})$ でこの境界拡張を表すとする．$q(\mathrm{Conf}(\mathbb{D})) = \mathrm{Möb}$ である．

定義　単位円周 $\mathbb{S}$ の向きを保つ自己同相写像 $g:\mathbb{S}\to\mathbb{S}$ で，単位円板 $\mathbb{D}$ の自己擬等

本研究は科研費 (課題番号:25287021) の助成を受けたものである．

2010 Mathematics Subject Classification: 30F60, 37E30

* 〒169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部数学科
e-mail: matsuzak@waseda.jp

角写像 $\widehat{g}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ の境界拡張 $(g=q(\widehat{g}))$ となるものを**擬対称写像**という．その全体 $\mathrm{QS}=q(\mathrm{QC}(\mathbb{D}))$ を擬対称写像群と定義する．

一方，$g\in\mathrm{QS}$ の $\mathbb{S}$ 自身の写像としての特徴づけも存在し，それは，対称な点間隔を擬対称（一様な誤差を許す対称性）にうつすことで与えられる．この誤差の度合いは擬対称定数で定量化される．$g\in\mathrm{QS}$ は一般には絶対連続とは限らない．

普遍タイヒミュラー空間 T を剰余類の集合により $T=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{QS}$ で定義する．$f\in\mathrm{QS}$ を代表元とする点を $[f]\in T$ で表す．$\mathbb{S}$ 上の QS を $\mathbb{D}$ に拡張して $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ を考えることにより，T に種々の構造を付加することができる．

擬対称写像群 QS は自然に右から普遍タイヒミュラー空間 $T=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{QS}$ に推移的に作用する．すなわち，$[f]\in T,\ g\in\mathrm{QS}$ に対して $g^*[f]=[f\circ g]$ と定義する：

$$T\times\mathrm{QS}\longrightarrow T:([f],g)\mapsto[f\circ g].$$

この QS が T のタイヒミュラーモジュラー群 Mod に相当するものである．

フックス群 $\Gamma\subset\mathrm{QS}$ の T への作用の固定点集合

$$T(\Gamma)=\{[f]\in T\mid\gamma^*[f]=[f]\ (\forall\gamma\in\Gamma)\}$$

はリーマン面 $\mathbb{D}/\Gamma$ のタイヒミュラー空間となる．条件 $\gamma^*[f]=[f]$ は $f\gamma f^{-1}\in\mathrm{M\ddot{o}b}$ と同値である．よって $T(\Gamma)$ は Γ の Möb の中での（擬対称写像による）変形空間とみなすことができる．

1.2. タイヒミュラー空間に関わる空間と写像

普遍タイヒミュラー空間に構造を与えるために基本となる空間と写像を以下のように定義する．

ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}(\mathbb{D})=\{\mu\in L^\infty(\mathbb{D})\mid\|\mu\|_\infty<1\}$$

で定める．擬等角写像 $\widehat{g}\in\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ の歪曲係数を $\mu_{\widehat{g}}(z)=\widehat{g}_{\bar z}/\widehat{g}_z$ で定義すると，$\mu_{\widehat{g}}$ は $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に属する．逆に，ベルトラミ方程式 $w_{\bar z}/w_z=\mu(z)$ の解の存在と一意性（可測リーマン写像定理）より，任意の $\mu\in\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して，$\mu_{\widehat{g}}=\mu$ となる $\widehat{g}\in\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ が $\mathrm{Conf}(\mathbb{D})$ の元の後からの合成を除いて一意的に存在する．これより

$$\mathrm{Conf}(\mathbb{D})\setminus\mathrm{QC}(\mathbb{D})=\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$$

の同一視を得る．

境界拡張 $q:\mathrm{QC}(\mathbb{D})\to\mathrm{QS}$ の各項を $\mathrm{Conf}(\mathbb{D})=\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D})\cong\mathrm{M\ddot{o}b}$ で割ると，

$$\mathrm{Conf}(\mathbb{D})\setminus\mathrm{QC}(\mathbb{D})=\mathrm{Bel}(\mathbb{D});\quad\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus\mathrm{QS}=T$$

となる．これにより，タイヒミュラー射影 $\pi:\mathrm{Bel}(\mathbb{D})\to T$ を得る．

正則２次微分の空間を $\mathbb{D}^*=\widehat{\mathbb{C}}-\overline{\mathbb{D}}$ の双曲密度関数を $\rho_{\mathbb{D}^*}(z)=2/(|z|^2-1)$ として，バナッハ空間

$$B(\mathbb{D}^*)=\{\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D}^*)\mid\|\varphi\|_\infty=\sup_{z\in\mathbb{D}^*}\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)|<\infty\}$$

により定義する．このとき，ベアス射影 $\Phi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to B(\mathbb{D}^*)$ を以下のように定める．

$\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して，$\mathbb{D}$ 以外で 0 と拡張して $\widehat{\mathbb{C}}$ 上のベルトラミ係数 $\widehat{\mu} \in \mathrm{Bel}(\widehat{\mathbb{C}})$ を定義する．$\widehat{\mathbb{C}}$ におけるベルトラミ方程式の解の存在と一意性より，$w \in \mathrm{QC}(\widehat{\mathbb{C}})$ で $w_{\bar{z}}/w_z = \widehat{\mu}(z)$ をみたすものが $\mathrm{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ の後からの合成を除き一意的に存在する．$\mathbb{D}^*$ への制限 $w|_{\mathbb{D}^*}$ は等角写像である．シュワルツ微分

$$S_w(z) = \left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 \quad (z \in \mathbb{D}^*)$$

は $S_w \in B(\mathbb{D}^*)$（実際 $\|S_w\|_\infty < 3/2$）をみたす．ベルトラミ方程式の解の $\mathrm{Conf}(\widehat{\mathbb{C}})$ の合成による不定性はシュワルツ微分をとると消えるので，$\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して $\varphi := S_w \in B(\mathbb{D}^*)$ が定義できる．これより $\varphi = \Phi(\mu)$ と定める．

ベルトラミ係数 $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して，$\pi(\mu_1) = \pi(\mu_2)$ と $\Phi(\mu_1) = \Phi(\mu_2)$ は同値である．したがって $\Phi \circ \pi^{-1} : T \to B(\mathbb{D}^*)$ が単射写像として定義できる．この写像を $\beta := \Phi \circ \pi^{-1} : T \to \beta(T) \subset B(\mathbb{D}^*)$ と定義してベアス埋め込みという．$\beta(T)$ は有界集合である．

1.3. タイヒミュラー空間の構造

上で定義した空間と写像を図示すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) = \mathrm{Conf}(\mathbb{D}) \backslash \mathrm{QC}(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
T = \mathrm{M\ddot{o}b} \backslash \mathrm{QS} \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) = \Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D})) \subset B(\mathbb{D}^*)
\end{tikzcd}$$

普遍タイヒミュラー空間 T の位相は，$\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ からの π による商位相を与える．これは QS の擬対称定数から定義される位相と一致することが知られている．さらに $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の双曲距離から誘導される擬距離がタイヒミュラー距離 d_T となる．

T および $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ は群構造をもつ．これは，群 QS および $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ の剰余類の代表系として，正規化条件をみたす元全体がとれること，およびその代表系が合成に関して群となることからわかる．ただし，位相群とはならない．このとき π は準同型で $\mathrm{Ker}\,\pi$ は自明なベルトラミ係数からなる正規部分群である．$\nu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の逆元を右からかける $\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の右変換 $r_\nu : \mu \mapsto \mu * \nu^{-1}$ $(\nu \mapsto 0)$ は双正則自己同相写像である．

ベアス埋め込み β の連続性は，Φ の連続性と π の開写像性よりわかる．開写像性は $U \subset \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ に対して $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\nu \in \mathrm{Ker}\,\pi} r_\nu(U)$ であることに注意する．β の開写像性は，以下でみるように，任意の $\varphi \in \Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D})) = \beta(T)$ において Φ が局所的に連続な切断（右逆写像）をもつことよりわかる．

定理 1 ([7]) ベアス埋め込み β は開集合 $\beta(T)$ の上への同相写像で，これにより，T は $B(\mathbb{D}^*)$ の有界領域としての複素構造をもつ．

さらに，ベアス射影 $\Phi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to B(\mathbb{D}^*)$ は正則写像であり，任意の $\varphi \in \Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D}))$ において，局所的に正則な切断 σ_φ をもつ．よって，$\mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ の正則な右変換 r_ν は，π により T の双正則変換 $R_\tau : T \to T$ $(\tau = \pi(\nu) \mapsto o = [\mathrm{id}])$ に射影される．これを T の基点変換という．

1.4. 原点の近傍での局所的な切断

ベアス射影 $\Phi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to B(\mathbb{D}^*)$ の像 $\Phi(\mathrm{Bel}(\mathbb{D})) = \beta(T)$ は原点 0 中心で半径 1/2 の開円板 $U_0(1/2)$ を含むことが知られている．この円板上では Φ の正則切断が以下の形の線形な写像で具体的に与えられる．

定理 2 ([2]) $\sigma : U_0(1/2) \to \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ を

$$\sigma(\varphi)(z) = -2\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z^*)(zz^*)^2\varphi(z^*)$$

で定義すると $\Phi \circ \sigma(\varphi) = \varphi$ をみたす．ここで $z^* = 1/\bar{z} \in \mathbb{D}^*$ は $z \in \mathbb{D}$ の $\mathbb{S}$ に関する鏡映点であり，$\rho_{\mathbb{D}^*}(z) = 2/(|z|^2 - 1)$ は $\mathbb{D}^*$ の双曲密度関数である．

1.5. 等角重心拡張による切断

境界拡張 $q : \mathrm{QC}(\mathbb{D}) \to \mathrm{QS}$ に対して，切断（右逆写像）$e : \mathrm{QS} \to \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ として有用なものに等角重心拡張がある．

$g \in \mathrm{QS}$ に対して，$w \in \mathbb{D}$ から観察した平均を

$$\xi_g(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}} \gamma_w(g(\zeta))|d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}} \frac{g(\zeta) - w}{1 - \bar{w}g(\zeta)}|d\zeta|$$

で定義する．ただし，$\gamma_w \in \mathrm{Conf}(\mathbb{D})$ は $w \mapsto 0$ をみたす等角自己同相写像である．$\xi_g(w_0) = 0$ となる点 $w_0 \in \mathbb{D}$ は一意的に存在し，それを ξ_g の重心という．これを用いて $e(g)(0) = w_0$ と定める．一般の $z \in \mathbb{D}$ に対する $e(g)(z)$ は $\xi_{g\circ\gamma_z}$ の重心で与える．

この等角重心拡張 $e(g)$ は $\mathbb{D}$ の擬等角微分同相写像であり，構成の仕方より等角自然性

$$e(\gamma_1 \circ g \circ \gamma_2) = \gamma_1 \circ e(g) \circ \gamma_2 \quad (\forall\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{M\ddot{o}b} \cong \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{D}))$$

をもつ．これより $\pi : \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \to T$ の切断 $s : T \to \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ を得る．

定理 3 ([11]) 等角重心切断 $s : T \cong \beta(T) \to \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ は実解析的である．この微分を複素化することにより，ベアス射影 Φ の $\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ における微分 $d_\mu\Phi$ の右逆複素線形写像が与えられる．とくに Φ の局所正則切断が得られる．

連続な大域的切断の存在により T（さらには等角自然性より任意のフックス群 Γ に対する $T(\Gamma)$) が可縮であることも示される．

2. 写像族による部分空間

擬対称写像群 QS の部分群に対象を限定して，普遍タイヒミュラー空間 T の部分空間を構成する．とくに写像になめらかさを要請すれば，このようにしてできた部分空間は，T のなかでフックス群の固定点集合で与えられる $T(\Gamma)$ とは別方向に広がる空間である．実際，フックス群 Γ が閉リーマン面を一意化するならば，非自明な $[f] \in T(\Gamma)$ に対して $f \in \mathrm{QS}$ は全特異な写像である．

なめらかさとは直接関連しないが,（漸近的な）対称写像群 $\mathrm{Sym} \subset \mathrm{QS}$ から構成される小タイヒミュラー空間 $T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym} \subset T$ がこの方面の理論のひな形になる．

2.1. 漸近的等角写像，対称写像，小タイヒミュラー空間

漸近的等角の概念を用いて T の部分空間を導入する．ベルトラミ係数 $\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ と $t \in (0,1)$ に対して $\kappa_\mu(t) = \mathrm{ess.sup}_{|z|>1-t} |\mu(z)|$ とおく．減衰ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) = \{\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \mid \kappa_\mu(t) \to 0 \ (t \to 0)\}$$

により定義する．

$\widehat{g} \in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$ が<u>漸近的等角写像</u>であるとは，歪曲係数 $\mu_{\widehat{g}}$ が $\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ に属することである．漸近的等角写像全体からなる $\mathrm{QC}(\mathbb{D})$ の部分群を $\mathrm{AC}(\mathbb{D})$ と書き，漸近的等角写像群という．

定義　漸近的等角写像 $\widehat{g}$ の境界拡張による像 $g = q(\widehat{g}) \in \mathrm{QS}$ を**対称写像**といい，その全体からなる QS の部分群 $\mathrm{Sym} = q(\mathrm{AC}(\mathbb{D}))$ を対称写像群と定義する．

$g \in \mathrm{Sym}$ についても，$\mathbb{S}$ 自身の写像としての特徴づけが存在し，それは，対称な点間隔を漸近的対称（点間隔が小さくなれば，対称に近づく）にうつすことで与えられる．

<u>小タイヒミュラー空間</u> を $T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym}$ で定義する．これは T の位相で閉部分空間になる．位相は T の相対位相を与える．対応する減衰正則 2 次微分の空間を

$$B_0(\mathbb{D}^*) = \{\varphi \in B(\mathbb{D}^*) \mid \sup_{|z|<1+t} \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)| \to 0 \ (t \to 0)\}$$

で与える．これは $B(\mathbb{D}^*)$ の閉（バナッハ）部分空間である．

これらの空間に，普遍タイヒミュラー空間に関わる各写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([16], [6])：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym} \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) \cap B_0(\mathbb{D}^*) \end{tikzcd}$$

位相はそれぞれ元の空間の相対位相であるので，写像の連続性，したがって正則性は自明に成り立つ．

定理 4 ([16] [13] [14])　小タイヒミュラー空間 T_0 に関連して以下が成り立つ．

(1) $\Phi : \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) \to B_0(\mathbb{D}^*)$ は正則である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap B_0(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ の中にうつす．

(3) 等角重心切断 s は実解析的で $s(T_0) \subset \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ をみたす．T_0 は可縮である．

(4) 右変換 r_ν ($\nu \in \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$) は $\mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T_0 の基点変換を導く．T_0 は T の部分群で位相群となる．

2.2. アファイン葉層化，漸近的タイヒミュラー空間

T の点 τ を原点 $o=[\mathrm{id}]$ にうつす基点変換を $R_\tau : T \to T$ とする．T を群とみなせば T_0 は部分群で，その τ^{-1} を代表元とする剰余類 $T_0\tau^{-1}$ が $R_\tau(T_0)$ である．

定理 5 ([15] [14]) 任意の $\tau \in T$ に対して，$\psi = \beta(\tau^{-1}) \in B(\mathbb{D}^*)$ とおくと

$$\beta \circ R_\tau(T_0) = \beta(T) \cap \{\psi + B_0(\mathbb{D}^*)\}$$

が成り立つ．

これにより，剰余類分解 $T = \bigsqcup R_\tau(T_0)$ とアファイン部分空間による分解 $B(\mathbb{D}^*) = \bigsqcup\{\psi + B_0(\mathbb{D}^*)\}$ がベアス埋め込み β で一対一に保たれる．これを T の T_0 によるアファイン葉層化とよぶ．

漸近的タイヒミュラー空間を $AT = T_0\backslash T = \mathrm{Sym} \setminus \mathrm{QS}$ で定義する．位相は商位相で与える．上の定理より，ベアス埋め込み β は単射連続写像 $\widehat{\beta} : AT \to B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ に射影する．この $\widehat{\beta}$ がさらに像の上への同相写像であることがわかり，AT に商バナッハ空間 $B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ の有界領域としての複素構造を導入できる．

2.3. 可積分タイヒミュラー空間

ベルトラミ係数に双曲計量に関する可積分条件を課して，対応する T の部分空間を定義する．技術的理由により，以下では $p \geq 2$ に対して p 乗可積分性を考える．$\mathbb{D}$ の双曲密度関数を $\rho_{\mathbb{D}}(z) = 2/(1-|z|^2)$ として，可積分ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D}) = \{\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \mid \|\mu\|_p^p = \int_{\mathbb{D}} |\mu(z)|^p \rho_{\mathbb{D}}^2(z)dxdy < \infty\}$$

とおく．

可積分タイヒミュラー空間を $T^p = \pi(\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D}))$ により定義し，$T^p = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym}^p$ をみたす QS の部分群を形式的に Sym^p と定義する．可積分正則 2 次微分の空間を

$$A^p(\mathbb{D}^*) = \{\varphi \in B(\mathbb{D}^*) \mid \|\varphi\|_p^p = \int_{\mathbb{D}^*} |\varphi(z)|^p \rho_{\mathbb{D}^*}^{2-2p}(z)dxdy < \infty\}$$

で与える．これは $B_0(\mathbb{D}^*)$ に含まれることが知られている．

注意 $g \in \mathrm{Sym}^p$ の $\mathbb{S}$ 自身の写像としての特徴づけは未解決問題であったが，最近 Sym^2 については，g が絶対連続で $h = \log g'$ が

$$\int_{\mathbb{S}\times\mathbb{S}} \frac{|h(x)-h(y)|^2}{\sin^2((x-y)/2)} dxdy < \infty$$

をみたすことと同値であることが Shen [29] により示された．

これらの空間に普遍タイヒミュラー空間に関わる写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([9], [17])：

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ T^p = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym}^p \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) \cap A^p(\mathbb{D}^*) \end{tikzcd}$$

ただし，位相はそれぞれの部分空間において，T およびもとの空間からの相対位相よりも強い位相を考える．実際，正則 2 次微分 φ のノルムには，定数 $c_p > 0$ が存在して $\|\varphi\|_\infty \le c_p \|\varphi\|_p$ なる評価がある．とくに $A^p(\mathbb{D}^*)$ の位相は $B(\mathbb{D}^*)$ からの相対位相より強い．$\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ には $\|\mu\|_p + \|\mu\|_\infty$ で定まる位相を与え，その π による商位相を T^p では考える．これらの位相のもとで，各写像の連続性を示すことが問題となる．正則性は連続性から一般論よりしたがう．

定理 6 ([9] [17] [31] [33] [36]) 可積分タイヒミュラー空間 T^p に関して以下が成り立つ．

(1) $\Phi : \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D}) \to A^p(\mathbb{D}^*)$ は正則である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap A^p(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ の中にうつす．

(3) 等角重心切断 s は連続で $s(T^p) \subset \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ をみたす．T_p は可縮である．

(4) $\nu \in s(T^p)$ に対して，右変換 r_ν は $\mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T^p の基点変換を導く．T^p は位相群である．

T^2 については，位相と両立する計量としてヴェイユ・ピーターソン計量が導入される ([9], [31])．原点 $o = [\mathrm{id}] \in T^2$ の接空間においてはヒルベルト空間 $A^2(\mathbb{D}^*)$ の内積を計量とし，任意の点 $\tau \in T^2$ の接空間においては，T^2 の基点変換の微分 $d_\tau R_\tau$ による原点での計量の引き戻しで与える．この計量の T^p での一般化については第 4 節で述べる．

2.4. 微分同相写像のタイヒミュラー空間

ある一定の滑らかさをもつ微分同相写像が定める T の部分空間を考える．具体的には，定数 $\alpha \in (0,1)$ に対して α 次のヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群 $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ を扱う．ここで $g \in \mathrm{Diff}_+^1(\mathbb{S})$ が α 次のヘルダー連続微分をもつとは，ある定数 $c \ge 0$ が存在して，g の持ち上げ $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について $|\tilde{g}'(x) - \tilde{g}'(y)| \le c|x-y|^\alpha$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}$ でみたされることである．

微分同相写像群のタイヒミュラー空間を $T_0^\alpha = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Diff}^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ と定義する．一方 α 次減衰ベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) = \{\mu \in \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D}) \mid \|\mu\|_{\alpha,\infty} = \mathrm{ess.sup}_{z \in \mathbb{D}}\, \rho_{\mathbb{D}}^\alpha(z)|\mu(z)| < \infty\}.$$

により定める．すなわち，$\mu \in \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ は $\kappa_\mu(t) = O(t^\alpha)$ $(t \to 0)$ と同値である．α 次減衰正則 2 次微分のバナッハ空間を

$$B_0^\alpha(\mathbb{D}^*) = \{\varphi \in B_0(\mathbb{D}^*) \mid \|\varphi\|_{\infty,\alpha} = \sup_{z \in \mathbb{D}^*} \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2+\alpha}(z)|\varphi(z)| < \infty\}$$

とする．

これらの空間に，普遍タイヒミュラー空間に関わる各写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([8], [32], [4], [12])：

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
T_0^\alpha = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}) \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) \cap B_0^\alpha(\mathbb{D}^*)
\end{tikzcd}$$

位相はそれぞれの部分空間において，T およびもとの空間からの相対位相よりも強い位相になっている．実際，$\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ および $B_0^\alpha(\mathbb{D}^*)$ の重み付きの ∞ ノルムは重みなしの ∞ ノルムより大きい．T_0^α の位相は π による $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の商位相を考える．また，$p\alpha > 1$ のとき，$T_0^\alpha \subset T^p$ であるが，このとき T_0^α の位相は T^p からの相対位相より強い．これらの位相のもとで，各写像の連続性を示すことが問題となる．正則性は連続性から一般論よりしたがう．

$\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ には，id において C^1 収束と微分の α 次ヘルダー定数の収束から基本近傍系を定め，その右変換で任意の点での基本近傍系を与えて位相が定義できる．これを $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ の右一様位相とよぶことにする．すなわち $g \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ に対して

$$p_{1+\alpha}(g) = \sup_{x\in\mathbb{S}} |g(x) - x| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{g}'(x) - 1| + \sup_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{|\tilde{g}'(x) - \tilde{g}'(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

とおくと，$g_n \to g \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ は $p_{1+\alpha}(g_n \circ g^{-1}) \to 0$ $(n \to \infty)$ により定義される．T_0^α には $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ の右一様位相から誘導される位相も入る．

定理 7 ([24] [25]) 微分同相写像群のタイヒミュラー空間 T_0^α に関して以下が成り立つ．

(0) $\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ の右一様位相から誘導される T_0^α の位相は π による $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の商位相と一致する．

(1) $\Phi : \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}) \to B_0^\alpha(\mathbb{D}^*)$ は正則である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap B_0^\alpha(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の中にうつす．

(3) 等角重心切断 s は連続で $s(T_0^\alpha) \subset \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ をみたす．T_0^α は可縮である．

(4) 右変換 r_ν $(\nu \in \mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D}))$ は $\mathrm{Bel}_0^\alpha(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T_0^α の基点変換を導く．T_0^α は位相群である．

2.5. VMOA タイヒミュラー空間

カルレソン測度を与えるベルトラミ係数および $\mathbb{S}$ 上の BMO 保存性から新しい部分空間を考察することができる．$\mathbb{D}$ 上の測度 m がカルレソン測度であるとは，$\mathbb{S}$ 上の任意の区間 I に対して

$$C(I) = \{r\zeta \mid \zeta \in I,\ 1 - (2\pi)^{-1}|I| \le r \le 1\}$$

とおくとき，

$$\|m\|_c^2 = \sup_{I\subset\mathbb{S}} \frac{m(C(I))}{|I|} < \infty$$

をみたすことをいう．$\mathbb{D}$ 上のカルレソン測度の全体を $CM(\mathbb{D})$ であらわす．$\mathbb{D}^*$ 上のカルレソン測度も同様に定義する．またカルレソン測度が境界で退化するとは，$m(C(I))/|I| \to 0$ $(|I| \to 0)$ をみたすことをいい，このようなものからなる $CM(\mathbb{D})$ の部分族を $CM_0(\mathbb{D})$ で表す．

境界で退化するカルレソン測度が定めるベルトラミ係数の空間を

$$\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D}) = \{\mu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D}) \mid |\mu(z)|^2 \rho_{\mathbb{D}}(z)dxdy \in CM_0(\mathbb{D})\}$$

とし，境界で退化するカルレソン測度が定める正則２次微分の空間を

$$B_v(\mathbb{D}^*) = \{\varphi \in B(\mathbb{D}^*) \mid \rho_{\mathbb{D}^*}^{-3}(z)|\varphi(z)|^2 dxdy \in CM_0(\mathbb{D}^*)\}$$

とする．これは，$m^* = \rho_{\mathbb{D}^*}^{-3}(z)|\varphi(z)|^2 dxdy$ に対するカルレソンノルム $\|m^*\|_c$ によりバナッハ空間となり，$B_0(\mathbb{D}^*)$ に含まれることが示される．

一方，$\mathbb{S}$ 上の BMO 関数の引き戻しが BMO となるような向きを保つ自己同相写像として強擬対称写像が特徴づけられるが，それら全体のなす群を SQS とする．さらに $g \in \mathrm{QS}$ が強対称写像であることを g が絶対連続で $\log g' \in \mathrm{VMO}(\mathbb{S})$ となることで定義し，その全体のなす群を SS とする．$\mathrm{SS} \subset \mathrm{SQS} \cap \mathrm{Sym}$ が成り立つ．このとき，BMOA タイヒミュラー空間を $T_b = \mathrm{M\ddot{o}b} \backslash \mathrm{SQS}$ で定義し，VMOA タイヒミュラー空間を $T_v = \mathrm{M\ddot{o}b} \backslash \mathrm{SS}$ で定義する．以下では後者のみ扱う．

これらの空間に，普遍タイヒミュラー空間に関わる各写像を制限したとき，以下のような可換図式が成立することが示される ([5], [10], [30])：

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bel}_v(\mathbb{D}) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
T_v = \mathrm{M\ddot{o}b} \backslash \mathrm{SS} \arrow[rr, "\beta"'] & & \beta(T) \cap B_v(\mathbb{D}^*)
\end{tikzcd}$$

位相はそれぞれの部分空間において，T およびもとの空間からの相対位相よりも強い位相になっている．$\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ には $m = |\mu(z)|^2 \rho_{\mathbb{D}}(z) dxdy$ のカルレソンノルム $\|m\|_c$ と $\|\mu\|_\infty$ との和から定まる位相を与え，T_v には π による商位相を与える．これらの位相のもとで，各写像の連続性を示すことが問題となる．正則性は連続性から一般論よりしたがう．

一方， SS には $\log g'$ の BMO ノルムから定義される位相（BMO 位相とよぶ）が入り，T_v にはそれから誘導される位相も入る．

定理 8 ([30] [10] [34] [35]) VMO タイヒミュラー空間 T_v に関して以下が成り立つ．

(0) SS の BMO 位相から誘導される T_v の位相は，π による $\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ の商位相と一致する．

(1) $\Phi : \mathrm{Bel}_v(\mathbb{D}) \to B_v(\mathbb{D}^*)$ は正則写像である．

(2) Φ の局所切断 σ_φ は正則で $\varphi \in \beta(T) \cap B_v(\mathbb{D}^*)$ の近傍を $\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ にうつす．

(3) 等角重心切断 s は 連続で $s(T_v) \subset \mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ をみたす．T_v は可縮である．

(4) $\nu \in s(T_v)$ に対して，右変換 r_ν は $\mathrm{Bel}_v(\mathbb{D})$ の双正則自己同相写像で，双正則な T_v の基点変換を導く．

3. 剛性定理

フックス群 $\Gamma \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ の擬対称写像 $f \in \mathrm{QS}$ による共役 $f\Gamma f^{-1}$ が Möb に属するような f の同値類の空間として Γ の変形空間であるタイヒミュラー空間 $T(\Gamma)$ が定義できた．Möb への表現をみるのと同様にして，QS の各種の部分群 P への表現を考えれば，

Γ の異なる変形空間が得られる．Γ の P での変形あるいは表現の剛性とは，$f \notin P$ による変形が自明なものとなる現象である．

特別なフックス群 Γ の性質（たとえば三角群）として剛性を考える場合が通常であるが，ここでは Γ は一般として，対称写像 $f \in \mathrm{Sym}$ による微分同相写像群 P への表現の剛性について述べる．

3.1. 対称写像による共役の剛性定理

対称写像による共役の剛性の基礎となる結果は以下のとおりである．このタイプの剛性定理の証明にはタイヒミュラー空間のベアス埋め込みを利用することが有効になるので，最も基本的な場合の証明でそれを紹介する．

定理 9 ([26]) 純楕円型ではない群 $\Gamma \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ の対称写像 $f \in \mathrm{Sym}$ による共役が $f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ をみたすならば $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ である．

（証明） $\varphi = \beta([f]) \in B_0(\mathbb{D}^*)$ とおく．条件 $f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ は任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma^*\varphi = \varphi$ と同値である．このとき

$$\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)| = \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|(\gamma^*\varphi)(z)| = \rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(\gamma(z))|\varphi(\gamma(z))|$$

がすべての $z \in \mathbb{D}^*$ で成り立つ．Γ の元の列で $|\gamma(z)| \to 1$ となるものを考えれば，$\varphi \in B_0(\mathbb{D}^*)$ より $\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)|\varphi(z)| = 0$ がわかる．よって $\varphi = 0$ であり，これは $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ を意味する． ■

ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群への表現に関して，次のような剛性定理が成り立つ．この結果の応用については以下で述べる．

定理 10 ([26]) 双曲型元を含む群 $\Gamma \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ の対称写像 $f \in \mathrm{Sym}$ による共役が $f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ をみたすならば $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ である．

3.2. 普遍タイヒミュラー空間のアファイン葉層化

ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像全体のなす群を

$$\mathrm{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S}) = \bigcup_{\alpha>0} \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$$

とおき，$T_0^{>0} = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S})$ をヘルダー連続微分をもつ微分同相写像のタイヒミュラー空間と定義する．対応するベルトラミ係数の空間，正則 2 次微分の空間をそれぞれ $\mathrm{Bel}_0^{>0}(\mathbb{D})$, $B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)$ とする．

小タイヒミュラー空間 T_0 による普遍タイヒミュラー空間 T のアファイン葉層化と同様にして，$T_0^{>0}$ による T のアファイン葉層化が得られる．すなわち，$T_0^{>0}\backslash T$ と $B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ がベアス埋め込みにより保たれる．

定理 11 ([26]) ベアス埋め込み $\beta : T \to \beta(T) \subset B(\mathbb{D}^*)$ は任意の $g \in \mathrm{QS}$ に対して

$$\beta(g^*(T_0^{>0})) = \beta(T) \cap \{\beta([g]) + B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)\}$$

をみたす．

これより，β から像の上への同相写像 $\beta_0^{>0} : T_0^{>0}\backslash T \to B_0^{>0}(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ が定義できる．

3.3. 群不変対称構造のタイヒミュラー空間

フックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ に対して，

$$\text{QS}(\Gamma) = \{f \in \text{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \text{Möb}\}$$

を考える．$\text{Möb} \setminus \text{QS}(\Gamma)$ は Γ のタイヒミュラー空間 $T(\Gamma)$ と一致する．同様にして

$$\text{QS}_{\text{Sym}}(\Gamma) = \{f \in \text{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \text{Sym}\}$$

とおくと，$\text{Möb} \setminus \text{QS}_{\text{Sym}}(\Gamma) \subset T$ は $T(\Gamma)$ を含む．Γ-不変対称構造のタイヒミュラー空間を

$$AT(\Gamma) = \text{Sym} \setminus \text{QS}_{\text{Sym}}(\Gamma) \subset AT$$

により定義する．これは Γ の対称写像群の中での変形空間とみなすことができる．リーマン面 $\mathbb{D}/\Gamma$ の漸近的タイヒミュラー空間とは異なるものであることに注意する．

普遍タイヒミュラー空間から漸近的タイヒミュラー空間への射影を

$$a : T = \text{Möb} \setminus \text{QS} \to AT = T_0 \backslash T = \text{Sym} \setminus \text{QS}$$

で表す．$AT(\Gamma)$ は $aT(\Gamma) := a(T(\Gamma))$ を含む．漸近的タイヒミュラー空間の商ベアス埋め込み $\hat{\beta} : AT \to B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ により $AT(\Gamma)$ は $B_0(\mathbb{D}^*)\backslash B(\mathbb{D}^*)$ の Γ-不変部分空間の有界領域に埋め込まれる．これにより $AT(\Gamma)$ に複素構造が導入される．

定理 12 ([23]) 位数無限のフックス群 Γ が $\dim T(\Gamma) \neq 0$ をみたすとする．このとき $AT(\Gamma)$ は無限次元である．$T(\Gamma)$ は a により双正則に $AT(\Gamma)$ に埋め込まれ，$aT(\Gamma) \subsetneqq AT(\Gamma)$ となる．

3.4. 剛性問題の別の定式化

漸近的タイヒミュラー空間 AT の場合と同様にして，$DT = \text{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S}) \setminus \text{QS}$ とおき，ここから AT への射影を $\theta : DT \to AT$ とする．対称写像群の中での変形空間と同様にして，フックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ に対して，

$$\text{QS}_D(\Gamma) = \{f \in \text{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \text{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S})\}$$

とし，Γ のヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群の中での変形空間を

$$DT(\Gamma) = \text{Diff}_+^{>1}(\mathbb{S}) \setminus \text{QS}_D(\Gamma) \subset DT$$

により定義する．定理 10 と定理 11 より次がわかる．

定理 13 ([26]) 双曲型元を含むフックス群 $\Gamma \subset \text{Möb}$ に対して

$$\theta|_{DT(\Gamma)} : DT(\Gamma) \to AT$$

は単射であり，像は $aT(\Gamma) \subset \theta(DT(\Gamma)) \subset AT(\Gamma)$ をみたす．

定理 12 の仮定のもとでは $aT(\Gamma) \subsetneqq AT(\Gamma)$ である．定理 13 の $\theta(DT(\Gamma))$ に関する包含関係により，フックス群 Γ の対称写像群およびヘルダー連続微分をもつ微分同相写像群への表現の剛性を定義することができる．予想としては $aT(\Gamma) = \theta(DT(\Gamma))$ を主張する．

3.5. 高階の微分同相写像群への表現

定理 13 の応用として，2 階以上も含めて，微分の階数が 1 より大きい微分同相写像群 $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ $(r>1)$ の中でのフックス群 Γ の変形について以下の結果を得る．前と同様に

$$D^rT = \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})\backslash \mathrm{QS}, \quad \theta^r : D^rT \to AT;$$
$$\mathrm{QS}_{D^r}(\Gamma) = \{f \in \mathrm{QS} \mid f\Gamma f^{-1} \subset \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})\}, \quad D^rT(\Gamma) = \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})\backslash \mathrm{QS}_{D^r}(\Gamma) \subset D^rT$$

を定義する．

定理 14 双曲型元を含むフックス群 $\Gamma \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ と $r>1$ に対して

$$\theta^r|_{D^rT(\Gamma)} : D^rT(\Gamma) \to AT$$

は単射である．とくに $G \subset \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ がそのようなフックス群の擬対称共役で，$f \in \mathrm{Sym}$ が $fGf^{-1} \subset \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ をみたすならば $f \in \mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{S})$ となる．

証明には，まず定理 13 を用いて f が微分同相写像であることをいい，Ghys-Tsuboi の結果の拡張 [28, p.152] を適用する．

AT に射影したフックス群 Γ の変形空間の包含関係は，

$$aT(\Gamma) \subset \theta^r(D^rT(\Gamma)) \subset \theta(DT(\Gamma)) \subset AT(\Gamma) \quad (r>1)$$

となる．Ghys [18] の剛性定理（以下の定理 22）はさらに Γ がココンパクトであるとき，十分大きい r に対して（たとえば $r \geq 3$）$aT(\Gamma) = \theta^r(D^rT(\Gamma))$ であることを含んでいる．

4. 微分同相写像群の共役問題

前節ではフックス群の擬対称写像による共役の剛性を問題にしたが，この節では与えられた微分同相写像群 G が同じ滑らかさをもつ微分同相写像 f によりフックス群に共役となるための条件について考察する．いいかえれば，フックス群から G への自明な変形が存在するための条件を G を用いて与える．

条件は，G の可積分タイヒミュラー空間への作用が固定点をもつための条件として定式化される．共役写像 f が G と同じ滑らかさをもつ微分同相写像としてとれることは剛性定理の帰結である．可積分タイヒミュラー空間にヴェイユ・ピーターソン計量を与え，その幾何学的な性質から等張変換群として作用する G の固定点の存在を示す．

4.1. 可積分タイヒミュラー空間のヴェイユ・ピーターソン計量

p 乗可積分タイヒミュラー空間 T^p $(p \geq 2)$ に対してヴェイユ・ピーターソン計量の拡張を定義することができる．まず，原点 $o = [\mathrm{id}] \in T^p \cong \beta(T) \cap A^p(\mathbb{D}^*)$ においては，接ベクトル $\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ の長さを $\omega_o^p(\varphi) = 2\|\ell_\varphi\|_*$ で与える．ここで $\|\ell_\varphi\|_*$ は，$\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ が定める $A^q(\mathbb{D}^*)$ $(1/p+1/q=1)$ 上の線形汎関数

$$\ell_\varphi : A^q(\mathbb{D}^*) \to \mathbb{C}; \quad \psi \mapsto \int_{\mathbb{D}^*} \psi(z)\overline{\varphi(z)}\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)dxdy$$

の作用素ノルムである．任意の点 $\tau \in T^p$ に対しては，基点変換 $R_\tau : T^p \to T^p$ のベアス埋め込みによる共役を $R_\tau^* = \beta \circ R_\tau \circ \beta^{-1}$ として，計量の引き戻し $\omega_\tau^p(dR_\tau^*(\varphi)) = \omega_o^p(\varphi)$ により定義する．

定義　p 乗可積分タイヒミュラー空間 T^p $(p \geq 2)$ に対して，各点 $\tau \in T^p$ の接空間 $A^p(\mathbb{D}^*)$ 上の計量 ω_τ^p を p-**ヴェイユ・ピーターソン計量**という．ω_τ^p により誘導される T^p 上の距離 d_{WP}^p を p-ヴェイユ・ピーターソン距離という．

注意　任意の $\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ に対して $\|\varphi\|_p/3 \leq \|\ell_\varphi\|_* \leq \|\varphi\|_p$ が成り立つ．とくに $(A^p(\mathbb{D}^*), \|\cdot\|_p)$ と $(A^p(\mathbb{D}^*), \|\ell_\bullet\|_*)$ は同型であり，p-ヴェイユ・ピーターソン計量の定義に $\|\cdot\|_p$ を用いても定数倍の差しかない．

命題 15 p-ヴェイユ·ピーターソン計量は T^p 上の連続なフィンスラー計量であり，Sym^p の作用で不変である．Sym^p は (T^p, d_{WP}^p) に等長的，推移的に作用する．

4.2. ヴェイユ・ピーターソン計量の完備性

可積分タイヒミュラー空間 T^p 上のヴェイユ・ピーターソン計量の完備性については $p = 2$ の場合には Cui [9] により示されている．同様の議論で一般の場合の証明もできる．

補題 16 T^p の原点のある近傍 U と定数 $c \geq 1$ が存在して，任意の $\tau, \tau' \in U$ に対して

$$c^{-1}\|\beta(\tau) - \beta(\tau')\|_p \leq d_{WP}^p(\tau, \tau') \leq c\|\beta(\tau) - \beta(\tau')\|_p$$

が成り立つ．

この補題と T^p の等質性および $A^p(\mathbb{D}^*)$ の完備性より結論を得る．

定理 17 ([26]) p-ヴェイユ・ピーターソン距離 d_{WP}^p に関して T^p は完備である．

4.3. 計量の比較定理

普遍タイヒミュラー空間 $T \cong \beta(T) \subset B(\mathbb{D}^*)$ 上のタイヒミュラー計量 ω は，原点 $o \in T$ と接ベクトル $\varphi \in B(\mathbb{D}^*)$ に対して $\omega_o(\varphi) = 2\|\ell_\varphi\|_*$ で与えられる．ただし作用素ノルムは線形汎関数

$$\ell_\varphi : A^1(\mathbb{D}^*) \to \mathbb{C}; \quad \psi \mapsto \int_{\mathbb{D}^*} \psi(z)\overline{\varphi(z)}\rho_{\mathbb{D}^*}^{-2}(z)dxdy$$

に対するものである．この計量より定まる距離がタイヒミュラー距離 d_T と一致する．$1/p + 1/q = 1$ に対して $b_p = \sup_{A^1(\mathbb{D}^*)-\{0\}} \|\psi\|_q/\|\psi\|_1 < \infty$ とおくと，定義より直ちにタイヒミュラー計量の T^p への制限と p-ヴェイユ・ピーターソン計量について，次の比較を得る．

命題 18 任意の $\tau \in T^p$ と接ベクトル $\varphi \in A^p(\mathbb{D}^*)$ に対して $\omega_\tau(\varphi) \leq b_p\omega_\tau^p(\varphi)$ が成り立つ．とくに $d_T \leq b_p d_{WP}^p$ が T^p 上で成り立つ．

一方，p-ヴェイユ・ピーターソン距離は，ベルトラミ微分の p 乗可積分ノルムと ∞ ノルムで評価することが可能である．

定理 19 ([26]) 任意の $\mu \in \mathrm{Ael}^p(\mathbb{D})$ に対して，$d_{WP}^p(o, \pi(\mu)) \leq C\|\mu\|_p$ が成り立つ．ここで C は $\|\mu\|_\infty$ のみによる定数である．

4.4. ２乗可積分タイヒミュラー空間の固定点

２乗可積分タイヒミュラー空間 T^2 での群作用の固定点の存在を考えることにより，微分同相写像群 G のフックス群への共役問題の解答を以下のように述べることができる．ただし，G が T^2 に作用するようにするために，G の滑らかさに条件がつくことに注意する．

定理 20 ([26]) 非可換群 $G \subset \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ $(\alpha > 1/2)$ がメビウス変換群に $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ により共役（すなわち $fGf^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$）となるための必要十分条件は，次の (1) と (2) の両方が成り立つことである．

(1) 正定数 $k_\infty < 1$ が存在して，任意の $g \in G$ が $\inf_{\pi(\mu)=[g]} \|\mu\|_\infty \leq k_\infty$ をみたす；

(2) 正定数 $k_2 < \infty$ が存在して，任意の $g \in G$ が $\inf_{\pi(\mu)=[g]} \|\mu\|_2 \leq k_2$ をみたす．

（証明の概略） 必要性をみるのは容易なので，十分性のみ概略を示す．$\alpha > 1/2$ のとき，$\mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S}) \subset \mathrm{Sym}^2$ が成り立つ．これより G の T への作用は，２乗可積分タイヒミュラー空間 T^2 を不変にすることがわかる．また，その作用は T^2 のヴェイユ・ピーターソン距離 d_{WP}^2 に関して等長的である．定理 19 から，条件 (1)，(2) より，原点 $o = [\mathrm{id}] \in T^2$ の軌道 $G(o)$ は d_{WP}^2 に関して有界である．一方，定理 17 より (T^2, d_{WP}^2) は完備であり，$p = 2$ の場合，ヴェイユ・ピーターソン計量はエルミート計量で負曲率をもつことが [31], [37] により示されている．これより (T^2, d_{WP}^2) は CAT(0) 空間であり，その性質より，有界軌道をもつ G は T^2 に固定点 τ をもつことがわかる．$f \in \mathrm{Sym}^2 \subset \mathrm{Sym}$ を用いて $\tau = [f]$ とおくと，$fGf^{-1} \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ である．$\Gamma = fGf^{-1}$ に対して定理 10 を適用すると $f^{-1} \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ が従う． ■

4.5. 共役問題の一般化

定理 20 における仮定 $\alpha > 1/2$ をおかない一般の主張が可能かどうかを考察する．任意の $g \in \mathrm{Sym}^p$ $(p \geq 2)$ に対して

$$\kappa_p(g) = \inf_{\pi(\mu)=[g]} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{|\mu(z)|^2}{1 - |\mu(z)|^2} \right)^{p/2} \rho_{\mathbb{D}}^2(z) dxdy \right)^{1/p}$$

と定義する．

定理 21 ([26]) 非可換群 $G \subset \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ が $f \in \mathrm{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ により $fGf^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}$ となるための十分条件は，$p\alpha > 1$ をみたす p に対して $\kappa_p(g) \leq \varepsilon_p$ がすべての $g \in G$ で成り立つことである．ここで，ε_p は p のみにより定まる十分小さな正定数である．

注意 定理 20 と同様な主張ができない理由は，(T^p, d_{WP}^p) の等長変換群が有界軌道をもてば固定点をもつことがまだ証明できないからである．かわりに一様凸なバナッハ空間 $A^p(\mathbb{D}^*)$ への等長作用で固定点の存在を示し，それが $T^p \cong \beta(T) \cap A^p(\mathbb{D}^*)$ に存在することを主張するために，軌道が十分に原点に近いという仮定をおいた．

5. ヘルダー連続微分をもたない微分同相写像群への表現

剛性定理や共役問題において，微分同相写像に微分のヘルダー連続性を課すことはタイヒミュラー空間論の枠組みでは本質的である．この条件をはずすとどのようになるのかを次の Ghys の剛性定理をもとにして考える．この定理は，十分なめらかな微分同相群の中へのココンパクトなフックス群の忠実な表現は，本質的にそのクラスの元での共役で与えられることを主張している．

定理 22 ([18]) Γ_0 を閉リーマン面を一意化するフックス群とする．任意の中への同型写像 $\theta:\Gamma_0\to \mathrm{Diff}^3_+(\mathbb{S})$ に対して，あるフックス群 Γ への同型 $\theta_0:\Gamma_0\to\Gamma$ と $f\in \mathrm{Diff}^3_+(\mathbb{S})$ が存在して，$\theta(\gamma)=f\theta_0(\gamma)f^{-1}$ $(\forall\gamma\in\Gamma_0)$ が成り立つ．

この定理が $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ に対しては成立しないであろう理由を，タイヒミュラー空間論から説明するのがこの節の目標である．定理 9 より，この課題のためには，フックス群 Γ に対してある $f\in \mathrm{Sym}-\mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ で $f\Gamma f^{-1}\subset \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ となるものを構成すればよい．

5.1. $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ のベルトラミ係数による特徴づけ

歪曲係数 $\mu\in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ をもつ $\mathbb{D}$ の擬等角自己同相写像を $\widehat{f^\mu}\in \mathrm{QC}(\mathbb{D})$, その境界拡張を $f^\mu=q(\widehat{f^\mu})\in \mathrm{QS}$ とする．$\kappa_\mu(t)=\mathrm{ess.sup}_{|z|>1-t}|\mu(z)|$ による $f^\mu\in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ であるための十分条件は以下のように知られている．

定理 23 ([8] [3]) $\displaystyle\int_0 \frac{\kappa_\mu(t)}{t}dt<\infty$ ならば $f^\mu\in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ となる．

$f^\mu\in \mathrm{Diff}^{1+\alpha}_+(\mathbb{S})$ は $\kappa_\mu(t)=O(t^\alpha)$ と同値で，このとき条件 $\int_0 \frac{\kappa_\mu(t)}{t}dt<\infty$ はみたされている．一方，明らかな必要条件としては次がある．関連する結果として，$\int_0\frac{\kappa_\mu(t)^2}{t}dt<\infty$ ならば f^μ が強対称写像（SS）であることも知られている．

命題 24 $f^\mu\in \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ ならば $f^\mu\in \mathrm{SS}$ である．

この命題より $f=f^\mu\in \mathrm{Sym}-\mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ の候補を以下のように構成する．$\mu_0\in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ を Γ-不変なベルトラミ係数とする．これは $\pi(\mu_0)\in T(\Gamma)$ を意味し，より具体的には

$$(\gamma^*\mu_0)(z):=\mu_0(\gamma(z))\frac{\overline{\gamma'(z)}}{\gamma'(z)}=\mu_0(z)\quad(\forall\gamma\in\Gamma)$$

をみたすものである．簡単のため，さらに $|\mu_0(z)|\equiv c>0$ となるものを選ぶ（タイヒミュラー微分など）．$0<\varepsilon\le 1/2$ に対して

$$\mu(z)=\left\{\left(\frac{1}{-\log(1-|z|)}\right)^\varepsilon\wedge 1\right\}\mu_0(z)$$

とおく．$\mu\in \mathrm{Bel}_0(\mathbb{D})$ より $f^\mu\in \mathrm{Sym}$ は明らかである．一方

$$\int_{\mathbb{D}}\frac{|\mu(z)|^2}{1-|z|}dxdy\asymp\int_0^1\frac{1-t}{t(\log t)^{2\varepsilon}}dt=\infty$$

がわかる．これが $\mu*\mathrm{Ker}\,\pi=\pi^{-1}(\pi(\mu))$ に属するすべてのベルトラミ係数で言えれば，$f^\mu\notin \mathrm{SS}$ より $f^\mu\notin \mathrm{Diff}^1_+(\mathbb{S})$ がわかる．

5.2. 微分可能性の証明

上で構成した μ に対し $\widehat{f}=\widehat{f}_\mu$ とし，$\widehat{f}\gamma\widehat{f}^{-1}$ $(\gamma \in \Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{D}))$ の歪曲係数 $\nu(z)$ を計算する．

$$|\nu(\widehat{f}(z))| = |\mu_{\widehat{f}\gamma\widehat{f}^{-1}}(\widehat{f}(z))| = \left|\frac{(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)}{1-\overline{(\gamma^*\mu)(z)}\mu(z)}\right| \le \frac{|(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)|}{1-\|\mu\|_\infty^2}$$

であるが，最後の項の分子は

$$\begin{aligned}|(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)| &\asymp \left|\left(\frac{1}{-\log(1-|\gamma(z)|)}\right)^\varepsilon - \left(\frac{1}{-\log(1-|z|)}\right)^\varepsilon\right| |\mu_0(z)| \\ &\le \varepsilon\left(\frac{1}{\xi}\right)^{1+\varepsilon} |\log(1-|\gamma(z)|)-\log(1-|z|)|\end{aligned}$$

のように評価される．

ここで ξ は $-\log(1-|\gamma(z)|)$ と $-\log(1-|z|)$ の間のある実数で，この間隔は z によらずγ のみによる $|\log|\gamma'(z)||$ と比較可能な定数で押さえられる．これより

$$|\nu(\widehat{f}(z))| = O((-1/\log(1-|z|))^{1+\varepsilon}) \quad (|z|\to 1)$$

を得る．最後に $1-|\widehat{f}(z)| = O((1-|z|)^{1/K_{\widehat{f}}})$（$K_{\widehat{f}}$ は $\widehat{f}$ の最大歪曲度）を用いると，$t=1-|z|$ として

$$\kappa_\nu(t) = O\left(\left(\frac{1}{-\log t}\right)^{1+\varepsilon}\right); \quad \int_0 \frac{\kappa_\nu(t)}{t}dt < \infty$$

がわかる．よって定理 23 より $f\gamma f^{-1} \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{S})$ となる．

注意　同様の議論で $f \in \text{Sym}-\text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ かつ $f\Gamma f^{-1} \subset \text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ をみたす $f=f^\mu$ を構成しようとする．$\mu(z)=(1-|z|)^\beta\mu_0(z)$ $(\beta<\alpha)$ とおくと $\kappa_\mu(t)=O(t^\beta)$ より $f^\mu \notin \text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ は期待できる．しかし，$\widehat{f}\gamma\widehat{f}^{-1}$ の歪曲係数の計算は

$$\begin{aligned}|(\gamma^*\mu)(z)-\mu(z)| &\asymp \left|e^{\beta\log(1-|\gamma(z)|)} - e^{\beta\log(1-|z|)}\right| |\mu_0(z)| \\ &\le \beta e^{\beta\xi}|\log(1-|\gamma(z)|)-\log(1-|z|)| \\ &\preceq \beta|\gamma'(z)|^\beta(1-|z|)^\beta|\log|\gamma'(z)|| = O((1-|z|)^\beta)\end{aligned}$$

であるため，指数関数の微分で冪 β をより大きくできず，$f\gamma f^{-1} \in \text{Diff}_+^{1+\alpha}(\mathbb{S})$ とは結論できない．

参考文献

[1] L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, 1966 (邦訳：谷口雅彦, 擬等角写像講義, 丸善, 2015).

[2] L. Ahlfors and G. Weill, *A uniqueness theorem for Beltrami equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 975–978.

[3] J. M. Anderson, J. Becker and F. D. Lesley, *On the boundary correspondence of asymptotically conformal automorphisms*, J. London Math. Soc. **38** (1988), 453–462.

[4] J. M. Anderson, A. Cantón and J. L. Fernández, *On smoothness of symmetric mappings*, Complex Var. Theory Appl. **37** (1998), 161–169.

[5] K. Astala and M. Zinsmeister, *Teichmüller spaces and BMOA*, Math. Ann. **289** (1991), 613–625.

[6] J. Becker and C. Pommerenke, *Über die quasikonforme Fortsetzung schlichter Funktionen*, Math. Z. **161** (1978), 69–80.

[7] L. Bers, *A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings*, Acta Math. **116** (1966), 113–134.

[8] L. Carleson, *On mappings, conformal at the boundary*, J. Anal. Math. **19** (1967), 1–13.

[9] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[10] G. Cui and M. Zinsmeister, *BMO-Teichmüller spaces*, Illinois J. Math. **48** (2004), 1223–1233.

[11] A. Douady and C. J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23–48.

[12] E. Dyn′kin, *Estimates for asymptotically conformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **22** (1997), 275–304.

[13] C. J. Earle, F. P. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part I: The complex structure,* In the tradition of Ahlfors and Bers, Contemporary Math. **256** (2000), 17–38.

[14] C. J. Earle, V. Markovic and D. Saric, *Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space*, Complex manifolds and hyperbolic geometry, Contemporary Math. vol. 311, pp. 87–105, Amer. Math. Soc., 2002.

[15] F. P. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller theory*, Mathematical Surveys and Monographs vol. 76, Amer. Math. Soc., 2000.

[16] F. Gardiner and D. Sullivan, *Symmetric structure on a closed curve*, Amer. J. Math. **114** (1992), 683–736.

[17] H. Guo, *Integrable Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 47–58.

[18] É. Ghys, *Rigidité différentiable des groupes fuchsiens*, Publ. Math. IHES. **78** (1994), 163–185.

[19] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer, 1992.

[20] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Graduate Texts in Mathematics vol. 109, Springer, 1986.

[21] K. Matsuzaki, *The universal Teichmüller space and diffeomorphisms of the circle with Hölder continuous derivatives*, Handbook of group actions (Vol. I), Advanced Lectures in Mathematics vol. 31, pp. 333–372, Higher Education Press and International Press.

[22] K. Matsuzaki, *Circle diffeomorphisms, rigidity of symmetric conjugation and affine foliation of the universal Teichmüller space*, Advanced Studies in Pure Mathematics vol. 72, Mathematical Society of Japan, pp. 145–180.

[23] K. Matsuzaki, *The Teichmüller space of group invariant symmetric structures on the circle*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. (to appear)

[24] K. Matsuzaki, *Teichmüller spaces of circle diffeomorphisms with Hölder continuous derivatives*, arXiv:1607.06300.

[25] K. Matsuzaki, *Continuity of the barycentric extension of circle diffeomorphisms of Hölder continuous derivatives*, arXiv:1607.06310.

[26] K. Matsuzaki, *Rigidity of groups of circle diffeomorphisms and Teichmüller spaces*, arXiv:1607.06316.

[27] S. Nag, *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, John Wiley & Sons, 1988.

[28] A. Navas, *Groups of circle diffeomorphisms*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, 2011.

[29] Y. Shen, *Weil-Petersson Teichmüller space*, arXiv:1304.3197.

[30] Y. Shen and H. Wei, *Universal Teichmüller space and BMO*, Adv. Math. **234** (2013), 129–148.

[31] L. Takhtajan and L. Teo, *Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space*, Mem. Amer. Math. Soc. **183** (2006), No. 861.

[32] L. Tam and T. Wan, *Quasi-conformal harmonic diffeomorphism and the universal Teichmüller space*, J. Diff. Geom. **42** (1995), 368–410.

[33] S. Tang, *Some characterizations of the integrable Teichmüller space*, Sci. China Ser. A **56** (2013), 541–551.

[34] S. Tang, H. Wei and Y. Shen, *On Douady-Earle extension and the contractibility of the VMO-Teichmüller space*, J. Math. Anal. Appl. **442** (2016), 376–384.

[35] Y. Wu and Y. Qi, *Douady-Earle extension of the strongly symmetric homeomorphism*, Kodai Math. J. **39** (2016), 410–424.

[36] M. Yanagishita, *Introduction of a complex structure on the p-integrable Teichmüller space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **39** (2014), 947–971.

[37] M. Yanagishita, *Kählerity and negativity of Weil-Petersson metric on square integrable Teichmüller Space*, J. Geom. Anal. (to appear)