

非ユークリッド幾何学 — 幾何学とは何かの認識

松崎 克彦

1. ユークリッド幾何学という常識

私たちが「まっすぐ」と感じる線、あるいは「平ら」と思う面。これらは私たちが日常的に無意識に信じている空間の性質に根ざしている。学校で学ぶ幾何学、いわゆるユークリッド幾何学は、紀元前3世紀にユークリッドがまとめた『原論 (Elements)』を起源とするが、その根底には空間とはこういうものだという先験的な観念がある。しかし、果たして空間の性質は唯一無二なのだろうか？ 現代の科学において、私たちは常識を疑う訓練を受けている。けれども、疑うことが常識となった最も劇的な常識の転換は、約200年前に静かに始まった非ユークリッド幾何学の登場によってもたらされたと言ってもよい。これは、数学における大きなパラダイムシフトでもあった。

2. 平行線公理の否定

ユークリッドの『原論』は、平面幾何学の体系化に成功した不朽の古典である。そのなかで最も物議を醸したのが「平行線公理 (第5公準)」である。

ある直線とその上にない点を与えられたとき、その点を通り、
与えられた直線に交わらない直線はただ一本存在する。

この命題は、他の公理、公準（点は線で結べる、円は作図できる、等々）と比べて明らかに複雑で、証明すべき命題に見える。実際、2000年近くもの間、数学者たちはこの平行線公理を他のより直感的な公理、公準から導出しようと試み続けた。しかし、その試みはすべて失敗に終わった。そしてついに19世紀初頭、ロバチェフスキー（ロシア）、ボヤイ（ハンガリー）、そしてガウス（ドイツ）らは大胆な発想にたどり着く。「この公理は証明すべきものではない。むしろ、否定しても矛盾のない幾何学が構築できるのではないか？」こうして誕生したのが「非ユークリッド幾何学」である。

ロバチェフスキーは1829年に、ボヤイは1832年にそれぞれ独立に平行線公理の否定をもとにした幾何学を発表した。その幾何学では、ある直線とその上にない点を与えられたとき、その点を通して与えられた直線に交わらない直線は二本以上存在する。また、三角形の内角の和は180度より小さくなる。当時の数学界では、これは一種の異端であった。なぜなら、空間は自明なものであると信じられていたからである。ユークリッド幾何学は真理そのものだった。それに対して、非ユークリッド幾何学は「仮想の世界」の数学にすぎないように見えたのだ。

3. 虚の幾何学

すなわち、非ユークリッド幾何学は虚の幾何学であった。それは i が虚数と呼ばれた理由と同じである。しかし、現在では虚数を実体のない空虚な数の概念であると考えられている。それが虚と感じられたのは、数の概念に対する認識の問題であると理解されている。では、非ユークリッド幾何学が虚の幾何学と考えられたのは、何に対する認識の問題であったのか？

平行線公理をみたさない幾何学を非ユークリッド幾何学と呼ぶならば、球面幾何学もそのひとつである。球面の上の大円を直線とみなせば、ある直線とその上にない点が与えられたとき、その点を通り、与えられた直線に交わらない直線は存在しない。また、地球上の赤道上の2点と北極点がつくる3角形は、内角の和が180度より大きくなる。このような事実は、何を直線として定義するかは別として、非ユークリッド幾何学の誕生以前から知られていたはずであるし、実際にそのような幾何における計算もされていた（エラトステネスは紀元前に地球の大きさを求めた）。非ユークリッド幾何学とは、狭義には負曲率の幾何で、与えられた直線に交わらない直線が複数存在するような幾何を意味していると説明すれば、球面幾何を排除することはできる。しかし、馬の鞍の上に作図をする機会は球面上に作図する機会より圧倒的に少なかったにせよ、原理は同じである。それを幾何学として認識できなかったのは、直線や平面や空間という概念の問題だったのか、それとも幾何学とは何かという本質的な問題だったのか？それを考察するための資料として、非ユークリッド幾何学の代表である双曲幾何学が認知された過程についてまず述べる。

4. モデルの登場 — 一つの世界が開かれる

非ユークリッド幾何学が真に数学の世界に受け入れられたのは、19世紀後半、ベルトラミやクライン、ポアンカレらによって双曲幾何学のモデルがユークリッド空間内に構築されたときである。とくに円板モデルや上半平面モデルでは、ユークリッド平面上のある種の曲線（円や直線の一部）が非ユークリッドの直線として振る舞うことを示した。このとき、非ユークリッド幾何学の内部的な論理的一貫性（無矛盾性）は、ユークリッド幾何学の枠組みの中で疑いようなものになった。「仮想の空間」ではなく、むしろ別の視点から見た空間の一つの可能性であることが証明されたのである。

双曲平面の上半平面モデルについて解説する。上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ において、各点 z を基点とするベクトルの大きさは、通常のユークリッド計量での大きさに $(\text{Im } z)^{-1}$ を乗じたものであるとする。モデルとは双曲世界の地図であると考え、これは縮尺が場所により変動する図法で描かれている地図であり、点 z における縮尺が $\text{Im } z$ で与えられているものである。

このモデル上で与えられた曲線 $\gamma(t)$ ($a \leq t \leq b$) の長さは、その接ベクトルの大きさ $|\gamma'(t)|$ をパラメータ t で積分すれば得られる。すなわち、 γ の双曲長さは

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \frac{dt}{\text{Im } \gamma(t)}$$

となる。2点 z, w の距離 $d(z, w)$ は、それを結ぶ曲線 ($\gamma(a) = z, \gamma(b) = w$) の長さの下限 $\inf \ell(\gamma)$ として定義でき、実際、その距離を与える曲線（測地線） γ_0 が存在することも確かめられる。この $d(z, w) = \ell(\gamma_0)$ をみたす測地線がユークリッド幾何の線分に相当するものである。また、この計量のもとで定義される無限に延びる測地線は、ユークリッド幾何の直線に相当するものであり、実軸に直交する垂直な半直線または実軸に直交する半円となる。

このモデルを用いれば、双曲幾何が平行線公理をみたされないことは、直線とその上にない点を図に描けば直ちに確かめられる。また、3本の測地線分で囲まれる図形として3角形 $\triangle ABC$ が定義されるが、その内角の和は180度より小さい。どのくらい小さいかはちょうどその三角形の双曲面積 $\text{Area}(\triangle)$ の分だけであること、すなわち

$$\text{Area}(\triangle) = \iint_{\triangle} \frac{dx dy}{|\text{Im } z|^2} = \pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$$

が成り立つ。初等的には面積分の計算がしやすいように $\triangle$ を分割して示すことができる。なお、これは曲面の曲率の積分がオイラー数で表せるというガウス・ボンネの定理を測地多角形に適用した結果であるとも解釈できる。

5. 一般相対性理論とリーマン幾何学

非ユークリッド幾何学に関する論争が終わりかけたころ、上で述べた双曲幾何のモデルが登場する以前の19世紀中頃に、リーマンは既にさらに一般の計量の概念に到達していた。双曲平面の上半平面モデルという地図では、縮尺が点によって変化していたが、リーマンはその縮尺がさらに一般になった平面や、次元が上がればもはや縮尺という共形的な言葉で表せるとは限らない計量が各点ごとに変動している空間を考えた。20世紀になると、この別の空間の概念は、物理学の世界にまで波及する。アインシュタインの一般相対性理論は、空間と時間が重力によって曲がることを主張するが、この「曲がった空間」はまさにリーマン幾何学という非ユークリッド幾何学の一形態で記述されている。つまり、かつては思考の実験室でしかなかった非ユークリッド幾何学が、実際の宇宙の構造を記述する数学として、最先端の科学理論と結びついたのである。

そうだとしたのなら、非ユークリッド幾何学はこの宇宙という現実世界に実在するものであり、決して虚の幾何学であったわけではないことになる。つまり、科学の発展が空間に対する知識を広げ、非ユークリッド幾何学をもつ空間が容認されたのである。したがって、この幾何学を受け入れることができるか否かの本質的な点は、空間が実在するかどうかの問題より、幾何学とは何かという認識の問題であると考えられることができるだろう。

6. 幾何学を統一する視点

非ユークリッド幾何学が登場したことで、数学者たちは「幾何学とは何か」という根源的な問いに直面することになった。それまでは、ユークリッド幾何学が空間の性質を記述する唯一の体系とみなされてきたが、その前提が崩れた今、幾何学の本質を再定義する必要が生じたのである。この課題に正面から取り組んだのが、19世紀末のドイツの数学者のクラインである。彼は1872年、幾何学を「変換群とその不変量の理論」として捉えるという革新的な見解を提示した。これが有名なエルランゲン・プログラムである。この視点では、幾何学とは単に空間の性質を記述するものではなく、ある空間とその上で定義された変換群（対称性の集合）に対して、どのような性質が不変に保たれるかを研究する学問と捉えられる。つまり、幾何学とは「どの変換を許すか」という選択に依存した相対的な構造だというのである。たとえば、ユークリッド幾何学はユークリッド変換群（距離と角度を保つ合同変換）を基本とし、距離や角度といった量が不変である。一方、双曲幾何学では、後述するようにメビウス変換のうち上半平面または単位円板を保つような変換群が対象となり、その下で不変に保たれる性質が研究対象となる。このように、異なる幾何学体系を、それぞれが持つ変換群によって統一的に記述できるというクラインの考え方は、非ユークリッド幾何学を例外的な幾何ではなく、「等価な幾何の一つ」として理解する枠組みを与えた点できわめて重要である。エルランゲン・プログラムの影響はその後の数学に決定的な影響を与え、さまざまな幾何学的理論が対称性と不変量という共通の視点で理解されるようになった。こうして、非ユークリッド幾何の発見がもたらした空間の多様性は、クラインの視点によって「幾何の統一理論」へと昇華されたのである。

7. 双曲幾何の汎用性

双曲幾何はこうして、ユークリッド幾何と等価なものとなったが、さらに進んで双曲幾何は数学的にはユークリッド幾何より自然で一般的な幾何のように感じられる。たとえば、向き付けられた閉曲面は種数という穴の数により位相的に分類されるが、種数2以上の閉曲面には双曲計量が入り、1の場合がユークリッド計量、0の場合が球面計量となる。3次元になっても同じような状況で、サーストンやペレルマンによる3次元閉多様体の幾何化定理では、8つの幾何構造で多様体の各部分を構成することができるが、そのなかで最も一般的な

幾何が双曲幾何である．ユークリッド幾何を含めてその他の幾何は，双曲幾何の極限状態で現れる特殊な状況であると理解されている．

閉曲面に対する上記の結果は，一意化定理とよばれる主張の帰結である．曲面は局所的には複素平面の領域と同一視され，それが整合性をもって貼り合っているリーマン面というものであるとみなすことができる．リーマン面の普遍被覆とは，リーマン面上を道に沿って進んでいったとき，穴のまわりを回って非自明な方法でもとの場所に戻っても，それは別の点であるとみなしてつくった穴のないリーマン面のことである．このような単連結なリーマン面が球面，複素平面，または上半平面（単位円板）と同値であると主張するのが一意化定理である．

この場合，上半平面 $\mathbb{H}$ に必然的に入る幾何構造が双曲幾何であることをエルランゲン・プログラムに従って示してみよう． $\mathbb{H}$ の変換群としては，その等角自己同型群，あるいは同じものであるが，双正則自己同型群 G をとることが要請される．この群はどのような変換により構成されるかは具体的にわかり，それは $\mathbb{H}$ を保存するメビウス変換（1次分数変換）全体となる：

$$G = \left\{ g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

この変換群で不変となる $\mathbb{H}$ 上の計量が簡単に求まる．実際， $g \in G$ に対して

$$|g'(z)| = \frac{1}{|cz + d|^2}, \quad \text{Im } g(z) = \frac{\text{Im } z}{|cz + d|^2}$$

であることが計算によりわかるので，計量 $|dz|/\text{Im } z$ が G により不変になるのである．これが $\mathbb{H}$ を双曲平面のモデルとするとときに与えた計量であった．

8. 双曲幾何問題演習

双曲幾何学が面白い理由のひとつは，いろいろな段階や方法で興味深い問題を引き出せるところにあるように思う．そのような例として，双曲計量の定義と測地線の形から初等幾何と積分の計算で確かめられる事実を問題形式で取り上げてみる．

（1）双曲半径 $r > 0$ の円の周の長さや面積を求めよ．

双曲平面は単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上にもモデルをもつ．この場合，双曲計量はユークリッド計量に $2/(1 - |z|^2)$ を乗じたもので与えられる．原点 0 から z までの双曲距離は

$$d(0, z) = \int_0^{|z|} \frac{2dt}{1 - t^2} = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

となる．この式で，原点からの双曲距離 r をユークリッド距離に読み替えた量を

$$r_e = \frac{e^r - 1}{e^r + 1}$$

とおく．

ある点から双曲距離一定の範囲にある点の集合として円が定義される．メビウス変換の円円対応から，双曲円の形状はユークリッド円と同じである．変換群の推移性から円の中心は原点であるとしてよい．このとき，双曲半径 r の円の周の長さ $L(r)$ は

$$L(r) = 2\pi r_e \times \frac{2}{1 - r_e^2} = 2\pi \sinh r$$

である．円の面積を $A(r)$ とすれば

$$A(r) = \int_0^r L(t) dt = 2\pi(\cosh r - 1)$$

となる．

(2) 双曲 3 角形の内接円の半径の上限値を求めよ．

双曲平面において 3 角形の各辺が無限に延びる測地線になって，3 頂点が無限遠にある図形を理想 3 角形という．上半平面モデル $\mathbb{H}$ では 3 頂点が実軸または ∞ ，単位円板モデル $\mathbb{D}$ では単位円周上にある状態を意味する．この理想 3 角形の内接円の半径が双曲 3 角形の内接円の半径の上限値であることが推察される．なお，理想 3 角形の双曲面積は π であり，これは 3 角形の面積の上限値でもある．

$\mathbb{H}$ の理想 3 角形として，3 つの測地線 $\operatorname{Re} z = -1$ ， $\operatorname{Re} z = 1$ ， $|z| = 1$ で囲まれたものを考えれば，内接円は $|z - 2i| = 1$ である．この双曲直径は $\log 3$ であるので，半径は $(\log 3)/2$ である． $\mathbb{D}$ で考える場合は，単位円周上に 3 点を等間隔にとる．それを結ぶ測地線により理想 3 角形をつくると，内接円は原点中心の円となり，初等幾何よりそのユークリッド半径が $2 - \sqrt{3}$ であることがわかる．これを双曲距離に直せば $(\log 3)/2$ を得る．

内接円の半径が一様に有界であることだけならば，半径 r の円の面積が $2\pi(\cosh r - 1)$ であるのに対して，3 角形の面積は π より小さいことからわかる．このように，ユークリッド平面とはちがって双曲平面の 3 角形は一様に痩せているが，一般の測地距離空間に対しても，その性質をもっていることで定義されたものがグロモフの双曲性である．

(3) 中心が O で双曲半径 r の円の周上に 2 点 A, B をとり，中心角 $\angle AOB$ を τ とし， A, B の間の円弧上に点 P をとり，円周角 $\angle APB$ を θ とする．このとき

$$2 \arctan \{(\cosh r)^{-1} \tan(\tau/4)\} \leq \theta < \arctan \{(\cosh r) \tan(\tau/2)\}$$

が成り立つことを示せ．

ユークリッド幾何の円周角の定理では，円周角は一定で $\theta = \tau/2$ であるが，双曲幾何では円の半径 r に応じた誤差が生じる．ユークリッド幾何の定理に対応する双曲幾何はいくつもある．たとえば，3 辺の双曲長さ a, b, c で対角の大きさが α, β, γ の三角形に関する正弦定理は

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

である．余弦定理は

$$\begin{aligned} \cosh c &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \\ &= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \end{aligned}$$

となる．とくに $\gamma = \pi/2$ の直角 3 角形については

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \sinh c, \quad \cosh c = \cosh a \cosh b = \cot \alpha \cot \beta$$

が成り立つ．これらの結果を用いて計算すれば，上記の円周角の定理が得られるが，詳細については演習とする．

9. おわりに

初めて「非ユークリッド幾何学」という名を耳にしたとき、多くの人はいま目にする空間とは全く異なる不思議な世界を想像する。確かにその言葉にはどこか疊惑的な響きがある。けれどもいまの私たちにとって、その神秘に心奪われるのは束の間の出来事に過ぎない。ほんの少しでも現代幾何学の基礎知識を身につけたならば、その高揚感は一瞬で消え去る。その意味で、非ユークリッド幾何学を鑑賞する賞味期限は本当に短い。残るのは、無限に広がる幾何学の世界と、それに対する新しい関心である。しかし、歴史をひもとけば、ユークリッド以来二千年以上にわたって多くの数学者が挑み続け、その熾烈な探究の末にようやく現在の幾何学体系が誕生するに至ったのである。どんなに新奇な概念もひとたび理解され定着すれば我々の常識となる。それは数学の世界では決して珍しい現象ではない。非ユークリッド幾何学の歴史はまさにそのことを物語っているように思う。